Międzynarodowa Konwencja Oceny Niepewności Pomiaru **GUM**

***Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1995.**

***Przewodnik* jest obecnie bezpłatnie dostępny** na portalu BIPM, w formie interaktywnego pliku pdf

***Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.**

***The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty*,** http://physics.nist.gov/cuu

Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM)

BIPM:	Bureau International des Poids et Mesures
IEC:	International Electrotechnical Commission
IFCC:	International Federation of Clinical Chemistry**
ISO:	International Organization for Standardization
IUPAC:	International Union of Pure and Applied Chemistry
IUPAP:	International Union of Pure and Applied Physics
OIML:	International Organization of Legal Metrology

http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

Metoda różniczki zupełnej

Dla wielkości złożonej $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ gdy niepewności maksymalne Δx_1 , Δx_2 , ... Δx_n są małe
w porównaniu z wartościami zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$
niepewność maksymalną (***graniczną***) wielkości y możemy wyliczać z praw rachunku różniczkowego:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \left|\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \left|\Delta x_2\right| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \left|\Delta x_n\right|$$

Taki sposób jednak nie jest dopuszczony, patrz *Przewodnik GUM.*

Prawo przenoszenia niepewności

Niepewność standardową wielkości złożonej $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ obliczamy z tzw. prawa przenoszenia niepewności jako sumę geometryczną różniczek cząstkowych

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} u(x_2)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} u(x_n)\right]^2}$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i u(x_i)\right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} u_i^2(y).$$

gdzie $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad u_i(y) = |c_i| u(x_i).$

c_i – współczynnik wrażliwości

$c_i u(x_i)$ – udziały niepewności

Metoda elementarna (ozn.: MEl)

Złożoną niepewność standardową można obliczyć bez odwoływania się do pochodnych.

Mianowicie – patrz *Przewodnik GUM*, we wzorze na $u_{\mathrm{c}}(y)$ można zastąpić $u_i(y) = |c_i| u_i(x)$ przez

$$Z_i = \frac{1}{2}\left[f\left(x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, \ldots, x_i - u(x_i), \ldots, x_n\right)\right].$$

Czyli
$$u_{\mathrm{c}}^2(y) = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2.$$

To znaczy, że wartość $u_i(y)$ wyznacza się obliczając zmianę spowodowaną zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$. Jako wartość $u_i(y)$ przyjmuje się $|Z_i|$, a jako wartość odpowiedniego współczynnika wrażliwości c_i przyjmuje się $Z_i/u(x_i)$.

Przykład – gęstość, prostopadłościan

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{abc},$$

$$Z_m = \frac{1}{2}\left(\frac{m+u(m)}{abc} - \frac{m-u(m)}{abc}\right) = \frac{1}{2}\frac{2u(m)}{abc} = \frac{u(m)}{abc} = \frac{m}{abc}\frac{u(m)}{m} = \rho u_r(m)$$

$$Z_a = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{(a+u(a))bc} - \frac{m}{(a-u(a))bc}\right) = \frac{1}{2}\frac{m}{abc}\left(\frac{a}{a+u(a)} - \frac{a}{a-u(a)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{1+u_\mathrm{r}(a)} - \frac{1}{1-u_r(a)}\right) = \frac{1}{2}\rho\left[\left(1-u_\mathrm{r}(a) + u_\mathrm{r}^2(a) - \ldots\right) - \left(1+u_\mathrm{r}(a) + u_\mathrm{r}^2(a) + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho\left[-2u_r(a) - 2u_\mathrm{r}^3(a) - \ldots\right] \approx -\rho u_\mathrm{r}(a)$$

Podobnie

$$Z_b \approx -\rho u_\mathrm{r}(b), \quad Z_c \approx -\rho u_\mathrm{r}(c)$$

Zatem

$$u_\mathrm{c}^2(\rho) = \sum_{i=1}^{4} Z_i^2 = \rho^2\left(u_\mathrm{r}^2(m) + u_\mathrm{r}^2(a) + u_\mathrm{r}^2(b) + u_\mathrm{r}^2(c)\right).$$

$$u_\mathrm{r}(\rho) = \frac{u_\mathrm{c}(\rho)}{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{u(c)}{\bar{c}}\right)^2}.$$

Przykład – SEM, *E*

$$E = U - IR$$

$$Z_U = \frac{1}{2}\left[\left(U + u(U) - IR\right) - (U - u(U) - IR)\right] = u(U)$$

$$Z_I = \frac{1}{2}\left[\left(U - (I + u(I))R\right) - (U - (I - u(I))R)\right] = -u(I)R$$

$$Z_R = \frac{1}{2}\left[\left(U - I(R + u(R))\right) - (U - I(R - u(R)))\right] = -u(R)I$$

Zatem

$$u_c^2(E) = \sum_{i=1}^{3} Z_i^2 = u^2(U) + u^2(I)R^2 + u^2(R)I^2.$$

Uwaga: przy obliczeniach numerycznych, korzystaniu z arkusza kalkulacyjnego na ogół korzystamy tylko ze wzoru podstawowego, nie dokonujemy jego przekształceń.

Prawo przenoszenia niepewności względnych

$$u_{\mathrm{c,r}}(y) = \frac{u_{\mathrm{c}}(y)}{y}$$ względny współczynnik niepewności

$$\frac{u_{\mathrm{c}}(y)}{|y|} = \sqrt{\left[\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial x_1}u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial x_2}u(x_2)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial x_n}u(x_n)\right]^2}$$

$$\frac{u_{\mathrm{c}}(y)}{|y|} = \sqrt{\sum\left[\left(\frac{x_i}{y}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2}.$$

Uzyskany wzór w postaci

$$u_{\mathrm{c,r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[p_i\, u_{\mathrm{r}}(x_i)\right]^2} \qquad \left(= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{c_i x_i}{y}\right)\frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2}\right)$$

wyraża **prawo propagacji niepewności względnych**

gdzie p_i – względny współczynnik wrażliwości; $p_i = c_i x_i / y$.

$$p_i = \frac{x_i}{y}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad u_r(x) = \frac{u(x_i)}{x_i}.$$

Prawo przenoszenia niepewności względnych

Złożona niepewność względna *jest sumą geometryczną względnych niepewności wielkości wejściowych* $u_{\mathrm{r}}(x_i)$ *pomnożonych przez* ***względne współczynniki wrażliwości*** *określone wzorem*

$$p_i = \frac{x_i}{y}\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Najprostszy przypadek gdy $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest w postaci jednomianu.

$$y = c\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Wówczas

$$u_{\mathrm{c,r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i u_{\mathrm{r}}(x_i)\right]^2}.$$

Prawo przenoszenia niepewności

$$u_{\mathrm{c}}^{2}(y) = \sum_{i=1}^{n}\left[c_i u(x_i)\right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} u_i^2(y).$$

$$u_{\mathrm{c,\,r}}^{2}(y) = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i u_{\mathrm{r}}(x_i)\right]^2$$

gdzie

c_i – współczynnik wrażliwości

$u_i(y) = c_i u(x_i)$ – udziały niepewności

$$u_{\mathrm{i}}(y) = c_i\, u(x_i) = p_i\, u_{\mathrm{r}}(x_i)\, y.$$

Przykład – gęstość, walec

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad \rho = m\left(\frac{\pi}{4}D^2 h\right)^{-1} = \frac{4}{\pi} m^1 h^{-1} D^{-2},$$

$$y = k\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -2$$

$$\ln\rho = \ln(4\pi^{-1}) + \ln m - \ln h - 2\ln D$$

$$\mathrm{d}(\ln\rho) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 0 + \frac{\mathrm{d}m}{m} + \left(-\frac{\mathrm{d}h}{h}\right) + \left(-2\frac{\mathrm{d}D}{D}\right)$$

$$\left(\frac{u(\rho)}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(-\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(-2\frac{u(D)}{D}\right)^2$$

$$u_{\mathrm{c,r}}^2(\rho) = [u_{\mathrm{r}}(m)]^2 + [-u_{\mathrm{r}}(h)]^2 + [-2u_{\mathrm{r}}(D)]^2$$

$$u_{\mathrm{c,r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i u_{\mathrm{r}}(x_i)]^2}.$$

$$u_{\mathrm{c,r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[p_i\, u_{\mathrm{r}}(x_i)]^2}$$

Stąd

$$p_1 = 1, \quad p_2 = -1, \quad p_3 = -2.$$

$$p_i = \frac{x_i}{y}\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Natomiast $u_{\mathrm{c}}(\rho) = \rho \cdot u_{\mathrm{c,r}}(\rho)$

Przykład – gęstość, walec

Z def. $\rho = \dfrac{m}{V}$, czyli $\rho = m\left(\dfrac{\pi}{4}D^2 h\right)^{-1} = \dfrac{4}{\pi}m^1 h^{-1} D^{-2}$,

Z porównania z: $y = k\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, widzimy, że $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -2$

Zatem ***względne współczynniki wrażliwości*** $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$.

Ze wzoru
$$u_{\mathrm{c,r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[p_i\, u_{\mathrm{r}}(x_i)\right]^2}$$

Zapisujemy
$$u_{\mathrm{c,r}}^2(\rho) = \left[u_{\mathrm{r}}(m)\right]^2 + \left[-u_{\mathrm{r}}(h)\right]^2 + \left[-2u_{\mathrm{r}}(D)\right]^2$$

Ponieważ
$$u_{\mathrm{c}}(\rho) = \overline{\rho} \cdot u_{\mathrm{c,r}}(\rho)$$

Więc
$$u_{\mathrm{c,w}}(\rho_{\mathrm{w}}) = \overline{\rho}_{\mathrm{w}} \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\overline{m}}\right)^2 + \left(-\frac{u(h)}{\overline{h}}\right)^2 + \left(-2\frac{u(D)}{\overline{D}}\right)^2}$$

Przykład – gęstość, prostopadłościan

$$\rho = m/V = m^1 a^{-1} b^{-1} c^{-1},$$

$$y = k\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -1, \quad \alpha_4 = -1.$$

$$\ln\rho = \ln m - \ln a - \ln b - \ln c$$

$$\mathrm{d}(\ln\rho) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}m}{m} + \left(-\frac{\mathrm{d}a}{a}\right) + \left(-\frac{\mathrm{d}b}{b}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}c}{c}\right)$$

$$u_c(\rho) = \bar{\rho}\sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{u(c)}{\bar{c}}\right)^2}\,.$$

Znając współczynniki p_i możemy obliczyć udziały niepewności $c_i\, u(x_i)$

$$u_\mathrm{i}(\rho) = c_i\, u(x_i) = p_i\, u_\mathrm{r}(x_i)\, \rho.$$

ZALECANE SPOSOBY ZAPISU NIEPEWNOŚCI

W celu uniknięcia niewłaściwego zrozumienia,
preferuje się podanie wyniku pomiaru w jednej z czterech postaci

Przykład dla pomiaru rezystancji

1. $R = 10{,}0034\ 56\ \Omega$, $u_c = 0{,}24\ \mathrm{m}\Omega$
2. $R = 10{,}0034\ 56(24)\ \Omega$
3. $R = 10{,}0034\ 56(0{,}000\ 24)\ \Omega$
4. $R = (10{,}0034\ 56 \pm 0{,}000\ 24)\ \Omega$

Uwaga: symbol $\pm$ jest tradycyjnie wykorzystywany do zapisu przedziału ufności, a w tym zapisie liczba za znakiem $\pm$ jest wartością niepewności rozszerzonej).