Cyfry znaczące i zaokrąglanie

I. Cyfry znaczące.

Dokładność wyniku wpływa na sposób zapisu wartości i formę prezentacji końcowej. Ilość cyfr podawanych w wyniku nie jest dowolna ale zależy od błędu bezwzględnego wyznaczenia tej wielkości. W większości przypadków zapisana postać liczby powstaje w wyniku zaokrąglenia, tj. ograniczenia liczby cyfr z uwzględnieniem odrzucanej części liczby. Prowadzi to interpretacji zamieszczenia cyfry na określonym miejscu dziesiętnym.

Cyframi **znaczącymi** (**pewnymi**) nazywamy wszystkie cyfry przybliżonej liczby, z wyjątkiem zer położonych na lewo od pierwszej różnej od zera cyfry. Cyfry znaczące określają stopień przybliżenia.

Przykład 1.

Zapis 34,5 (liczba cyfr znaczących $\boldsymbol{N} = 3$) oznacza, że błąd bezwzględny wyznaczenia liczby jest mniejszy lub równy 0,05.

Jeśli postać liczby powstała w rezultacie czysto mechanicznego odrzucenia końcowych cyfr to wówczas liczba z N cyframi znaczącymi ma błąd około 1 na N – tym miejscu. Tak więc zapis 34,5 ($\boldsymbol{N} = 3$) oznacza, że błąd jest rzędu 0,1 a zapis 34 oznacza, że błąd jest rzędu 1.

0,00345 – 3 cyfry znaczące; 3450 – 4 cyfry znaczące; 34,5004 – 6 cyfr znaczących.

W odniesieniu do cyfr znaczących stosujemy następującą terminologię:

1. Skrajna lewa, niezerowa cyfra znacząca nosi nazwę *najbardziej znaczącej cyfry* liczby (np. **2**030,50)
2. Skrajna prawa, niezerowa cyfra (w części – dziesiętne) to – *najmniej znacząca cyfra* liczby (np. 2030,**5**).
3. Jeśli w zapisie nie występuje przecinek dziesiętny, to najmniej znaczącą cyfrą jest skrajna prawa cyfra (także zero), np. 203**0**.
4. Ilość cyfr zawartych pomiędzy najmniej i najbardziej znaczącą określa liczbę cyfr znaczących liczby. Np. w liczbie 2030 są cztery cyfry znaczące.

Przykład 2

Zgodnie z regułami np. liczba 420 ma trzy cyfry znaczące. Jeśli z wartości błędu wynika, że ostatnie 0 nie jest cyfrą pewną (tzn. błąd jest większy od 0,5) to nie wykazujemy jej stosując formę zapisu naukowego (scientific notation): $4{,}2 \cdot 10^2$. W tym zapisie wszystkie cyfry pierwszego członu traktowane są jako znaczące. (np. w zapisie $340 \cdot 10^{-2}$ są trzy cyfry znaczące a błąd mniejszy od 0,005).

Z kolei, zapis 20,0 jest poprawny gdy błąd bezwzględny jest mniejszy lub równy 0,05, mimo, że liczba cyfr znaczących wynosi 1.

Podczas zapisu liczby należy zwracać szczególną uwagę na liczbę zer mogących sugerować większą dokładność niż faktycznie istniejąca.

Błąd graniczny (niepewność graniczna) – połowa ostatniej nie napisanej cyfry znaczącej.

Przeważnie mamy do czynienia z liczbami przybliżonymi o znanym stopniu przybliżenia:

$$(X_0 - \Delta x) < X < (X_0 + \Delta x)$$

gdzie

X_0 – znane przybliżenie; X – liczba przybliżona; Δx – błąd graniczny (niepewność graniczna).

Umieszczenie cyfry na najmniej znaczącym miejscu oznacza, że błąd bezwzględny wyznaczonej liczby jest mniejszy lub równy połowie rzędu tego miejsca.

Z formy zapisu (liczby cyfr znaczących) powstałej w rezultacie zaokrąglania wartości można oszacować wartość wynikającego zeń błędu bezwzględnego.

Błąd względny można obliczyć na podstawie jego definicji korzystając z podanej liczby i wartości maksymalnej błędu bezwzględnego. Ta ostatnia wynika z interpretacji liczby cyfr znaczących w zaokrąglanej liczbie. Zilustrujemy to przykładem:

Przykład 3
Liczbę, po zaokrągleniu zapisano w postaci 67,2. Oszacować maksymalny błąd bezwzględny tej wartości.

Podane w liczbie 67,2 trzy cyfry znaczące oznaczają, że maksymalny błąd bezwzględny wynosi 0,05.

Zalecenia zapisywania błędu bezwzględnego (i niepewności pomiarowej):
Błąd bezwzględny powinien być zapisany z podaniem dwóch cyfr znaczących.
Zaokrąglając niepewności pomiarowe dokonujemy (prawie) zawsze zaokrąglenia w górę.

Przykład 4
Obliczony błąd bezwzględny wynosi 2,12. Po zaokrągleniu do 2 cyfr znaczących zapisujemy go jako: 2,2

Zalecenie zapisywania wyniku
Ostatnia cyfra znacząca ostatecznego wyniku powinna być na tym samym miejscu dziesiętnym co błąd bezwzględny.

W praktyce laboratoryjnej całkowicie wystarczające jest podawanie wyników końcowych poszukiwanych wartości w postaci z trzema cyframi znaczącymi.

Przykład 5
Dla wartości 321,67 oszacowany błąd bezwzględny wynosi 0,2. Przedstaw zapis ostateczny wyniku.

Ponieważ błąd bezwzględny 0,2 > 0,05 zatem w wyniku powinniśmy ograniczyć liczbę cyfr znaczących do pierwszej pozycji po przecinku Opuszczając ostatnią cyfrę dokonujemy zaokrąglenia. Ostatecznie poprawny zapis wyniku to 321,7 ± 0,2.

Przy błędzie wynoszącym 2 ten sam wynik powinien być zapisany jako 322 ± 2, a przy błędzie 20: 320 ± 20.

W przypadku liczby cyfry znaczących mniejsze lub równej 2, dla czytelności informacji często podaje się w zapisie dodatkową cyfrę.

Przykład 6
Określona wartość wynosi: 2,723 a błąd bezwzględny ±1. podaj zapis końcowy.

Poprawny zapis ostateczny to 2,7 ± 1,0 zamiast: 3 ± 1.

Z uwagi na zaokrąglanie, przy zapisywaniu i korzystaniu z wartości pośrednich, na których wykonywane są obliczenia prowadzące do ostatecznego wyniku należy zapisywać o jedną cyfrę znaczącą więcej niż podaje zasada ogólna. Dopiero przy ostatecznym zapisie wyniku redukujemy liczbę cyfr znaczących.
Zarówno wynik jak błąd (niepewność pomiaru) powinny być zapisywane w tej samej formie np.

Przykład 7.
Zapis: 456,676 m ± 0,05 m jest niepoprawny

Prawidłowy zapis to: (456,68 ± 0,05) m lub 456,68 m ± 0,05 m.

Zapisy: $689 \cdot 10^{-9}$ m ± 20 nm oraz $689 \cdot 10^{-9}$ m ± $200 \cdot 10^{-10}$ m są niepoprawne.

Prawidłowy zapis to: $(689 \pm 2) \cdot 10^{-9}$ m.

Przy dużej ilości danych liczbowych oraz w obliczeniach pośrednich niewygodnie jest stosować dwuczęściowy zapis wartości (wartość ± błąd). Zamiast tego, w większości przypadków wystarczy używać jednoczłonowego zapisu, pamiętając o znaczeniu wykazanych cyfr znaczących (patrz podane wyżej reguły). I tak np. zapisując liczbę w postaci 234 mamy prawo uważać, że przedstawia ona wartość zawartą w granicach: 234 ± 0,5. Zapis 234,2 oznacza odpowiednio; 234,2 ± 0,05 a zapis $2{,}3 \cdot 10^2$ odpowiednio $(2{,}3 \pm 0{,}05) \cdot 10^2$.

II. Zaokrąglanie

Odrzucając, zgodnie z podanymi zaleceniami, cyfry w zapisie wyniku jednocześnie należy dokonać modyfikacji zaokrąglenia pozostającej liczby, tak by uwzględnić wartość odrzucanych cyfr.

Wykorzystujemy przy tym następujące reguły:

1) Jeśli pierwsza (z lewej) z odrzucanych cyfr jest większa od 5 lub jest równa 5 lecz występują po niej następne odrzucane cyfry, to stosujemy zaokrąglenie w górę (ostatnią z pozostających cyfr zwiększamy o 1).

2) Jeśli odrzucaną cyfrą jest 5 (i tylko jedna cyfra jest odrzucana lub po „5” są same zera) to ostatnią z pozostających cyfr zwiększamy o jeden kiedy jest ona nieparzysta, lub pozostawiamy bez zmian, kiedy jest ona parzysta.
3) Jeśli pierwsza (z lewej) z odrzucanych cyfr jest mniejsza od 5, to ostatnia z pozostających cyfr pozostaje bez zmian.

Przykład 8.

123,4567 $\approx$ 123,46;   123,4546 $\approx$ 123,45;   1233,654501 $\approx$ 1233,655;   123,5001 $\approx$ 124;
123,5000 $\approx$ 124;   1233,6545 $\approx$ 1233,654;   1233,6535 $\approx$ 1233,654;

II.2. Działania na liczbach przybliżonych.

W przypadku pomiarów pośrednich zapisane zgodnie z podanymi wyżej regułami wartości liczbowe używane są do dalszych obliczeń, które generują nowe liczby o zmienionej postaci. Przed przedstawieniem wyników takich obliczeń ponownie należy określić liczbę cyfr znaczących. Stosujemy wówczas następujące zasady oparte na regułach przenoszenia błędów:

1. W przypadku dodawania lub odejmowania w wyniku pozostawiamy liczbę cyfr znaczących równą liczbie cyfr znaczących najmniej dokładnego składnika operacji (najmniejszą liczbę cyfr znaczących).
2. Ilość cyfr znaczących w ilorazie (w iloczynie) równa się ilości cyfr znaczących w tym jego czynniku, który zawiera najmniej cyfr znaczących.
3. W przypadku odwrotności liczby (o liczbie cyfr >2) ilość cyfr znaczących maleje o 1.
4. Przy dodawaniu, odejmowaniu i mnożeniu liczby przybliżonej z udziałem liczby dokładnej w wyniku podajemy taką ilość cyfr znaczących, jaką ma liczba przybliżona.
5. W przypadku pierwiastkowania liczby przybliżonej można przyjąć, że liczba cyfr pierwiastka jest równa liczbie cyfr liczby podpierwiastkowej (wskazówka praktyczna).
6. W przypadku logarytmowania liczby przybliżonej liczba cyfr znaczących pozostaje bez zmian

Wskazówka praktyczna. Pamiętajmy o zdrowo-rozsądkowej zasadzie: *dokładność analizowanego wyniku nie może rosnąć w rezultacie dokonywanych przekształceń i obliczeń*!

Podczas obliczania wyników pośrednich należy przyjmować zawsze o jedną liczbę znaczącą więcej niż wskazują powyższe zasady.

Jeżeli dane wyjściowe można brać z dowolną dokładnością, wówczas aby otrzymać wynik o *k* cyfrach, należy brać dane z taką ilością cyfr, które zgodnie z regułami 1-6 dają w wyniku *k* + 1 cyfr.

Przykład 9

a) 32,658 + 11,23 + 4,71 = 48,598 = 48,6   11 + 0,11 – 0,0011= 11,1089   zapis prawidłowy 11
   9,01 + 21,5 + 12,456 = 42,9661   zapis prawidłowy   43,0
b) $123{,}45\cdot 12{,}3456 = 1524{,}06$; $9{,}32\cdot 111\cdot 0{,}038 = 39{,}31176 = 39$; $12{,}345^2 = 152{,}399$;

II. 3. Zaokrąglanie wyniku

Przykład. Postępowanie przy opracowywaniu niepewności maksymalnej pomiaru pośredniego.

Zwróć uwagę na wyróżnione określenia. Przykład należy przeanalizować i wykonać samodzielnie całość obliczeń dokładnie tak, jest to zrobione poniżej.

1. **Wynik** – wartość wielkości fizycznej, obliczona ze wzoru, do którego podstawiono wartości liczbowe wyników pomiarów,

przykład:

a) Wzór: $R = U/I$, gdzie R – opór elektryczny, który wyznaczamy, U – spadek napięcia (w skrócie napięcie), I – natężenie prądu.
b) Dane pomiarowe:
   U = 220,1 mV,
   I = 1,584 mA,
   ΔU = 1,5 mV – niepewność pomiarowa (inne określenia: dokładność pomiaru, błąd pomiaru),
   ΔI = 0,025 mA – niepewność pomiarowa I.

c) Wynik:

$$R = \frac{220{,}1\,\mathrm{mV}}{1{,}548\,\mathrm{mA}} = \frac{220{,}1}{1{,}548}\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{mI}} = 142{,}18\,\Omega\,.$$

d) Wyjaśnienia:

i) wynik został obliczony z dokładnością do 5 cyfr znaczących (czyli z zapasem);

ii) przedrostek układu SI „m” czyli mili, można skrócić: mV/mA = V/A = Ω
(Ω – jednostka oporu elektrycznego, om).

2. Niepewność pomiaru (używane jeszcze określenie błąd nie jest zalecane) wyniku:

a) Wzór na obliczenie niepewności pomiaru (tu niepewności maksymalnej) wyniku:

$$\Delta R = R\left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}\right)$$

Uwaga: Wzór ten, wynikający z metody logarytmicznej nie jest zalecany.

b) Obliczenia:

$$\Delta R = 142{,}18\ \Omega\left(\frac{1{,}5\,\mathrm{mV}}{220{,}1\,\mathrm{mV}} + \frac{0{,}025\ \mathrm{mA}}{1{,}548\ \mathrm{mA}}\right) = 3{,}27\ \Omega\,.$$

Wyjaśnienie: ΔR zostało obliczone z dokładnością do 3 cyfr znaczących (z taką dokładnością należy obliczać niepewności pomiarowe).

3. Zaokrąglanie:

a) Najpierw zaokrąglamy niepewność pomiarową (reguła: zawsze w górę, do 2 cyfr znaczących lub jednej jeśli wzrost niepewności będzie mniejszy niż 10 %):

$$\Delta R = 3{,}27\ \Omega \approx 3{,}3\ \Omega.$$

b) Następnie zaokrąglamy wynik do miejsca dziesiętnego, na którym jest ostatnia cyfra znacząca niepewności pomiarowej (tutaj akurat 1 cyfra po przecinku):

$$R = 142{,}18\ \Omega \approx 142{,}2\ \Omega.$$

4. Prezentacja: obie wielkości (tj. wynik i jego niepewność pomiarową) przedstawiamy razem w postaci:

$$R = (142{,}2 \pm 3{,}3)\ \Omega.$$

Należy zwróć uwagę że obie wielkości są zaokrąglone, ich ostatnie cyfry są na tej samej pozycji dziesiętnej, podana została jednostka.
W celu uniknięcia niewłaściwego zrozumienia, preferuje się podanie wyniku pomiaru w jednej z czterech postaci

Przykład 10 dla zapisu wartości z pomiaru rezystancji

1. R = (10,0034 56 ± 0,000 24) Ω – zapis ten głównie stosujemy dla niepewności rozszerzonej.
2. R = 10,0034 56 Ω, u_c = 0,24 mΩ
3. R = 10,0034 56(24) Ω
4. R = 10,0034 56(0,000 24) Ω