



Analiza graficzna w nauczaniu fizyki

■ HENRYK SZYDŁOWSKI (Uniwersytet Adama Mickiewicza, Poznań)

Wprowadzenie

Wykresy stanowią jeden z elementów łączących fizykę z matematyką i pomagają zrozumieć istotną treść zawartą w równaniach. W fizyce wyniki doświadczalne przedstawione na wykresie pozwalają odgadnąć związek matematyczny zachodzący pomiędzy wielkościami odkładanymi na osiach, a tym samym „odkryć” prawo fizyczne wiążące te wielkości. Do poprawnego wnioskowania i pełnego zrozumienia zjawisk w oparciu o wykresy niezbędna jest informacja na temat niepewności pomiarowych i ich wpływu na obraz graficzny.

Graficzna analiza niepewności pomiarowych od dawna jest nauczana w fizyce ([1], [2]) i została włączona do „Syllabusa” maturalnego ([3]), co zmusza nauczycieli fizyki w liceum do uwzględnienia tego elementu w nauczaniu. Jednakże nauczanie analizy niepewności musi ulec modyfikacji w związku z wprowadzeniem przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną ISO (International Organization for Standardization) międzynarodowych norm oceny niepewności pomiarowych ([4], [5]). Normy wprowadzą porządek terminologii i usuwają problemy, które powstawały na styku matematyki i teorii pomiarów (tak nazywa się całokształt podstaw matematycznych metrologii) i to stanowi ich pozytywną stronę, lecz z drugiej strony, podobnie jak każda nowość, wywołują zamęt w dotychczasowej praktyce. Ponadto normy regulują tylko generalne zasady i pozostawiają szeroki obszar swobody, który wypełnić muszą praktycy na własną odpowiedzialność. Podejmując to wezwanie, w niniejszej pracy przyjmujemy następujące założenia:

1. Każdy wynik pomiaru trzeba uzupełnić informacją o jego niepewności.

2. Miarą niepewności jest niepewność standardowa $u(x)$ zdefiniowana w normach ISO.

3. Zgodnie z normami, na pełen wynik pomiaru składa się wynik liczbowy i jego niepewność standardowa. Zatem istnieje konieczność obliczenia i podania niepewności standardowej w wynikach końcowych.

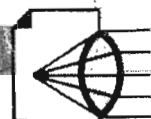
4. Normy ISO nakładają na eksperymentatora obowiązek przypisania każdemu wynikowi pomiaru niepewności standardowej o wartości uzasadnionej merytorycznie, logicznie i poprawnej matematycznie.

5. Definiujemy **niepewność wzorcowania**, oznaczoną przez Δx , jako wyrażoną w jednostkach skali najmniejszą działkę przyrządu stosowanego do wykonania tego pomiaru. Na podziałce milimetrowej $\Delta x = 1\text{mm}$, a na zegarku z sekundnikiem – $\Delta t = 1\text{s}$. Niepewność wzorcowania Δx posłuży nam jako podstawa do oceny niepewności standardowej pomiaru $u(x)$.

6. Przyjmujemy, że do niepewności wzorcowania można stosować prostokątny (jednostajny) statystyczny rozkład prawdopodobieństwa o niezerowej i stałej wartości prawdopodobieństwa w przedziale od $-\Delta x$ do $+\Delta x$ ([5]). Odchylenie standardowe w rozkładzie prostokątnym jest równe $\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta x$ i przyjmujemy, że jest ono równe niepewności standardowej typu B:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta x. \quad (1)$$

7. Dotychczas w szkole zarówno przy obliczaniu niepewności pomiarów pośrednich, jak i w analizie graficznej ([1], [2]) obliczano tzw. niepewności maksymalne oznaczane symbolem $\Delta_M x$, które nie istnieją w normach (stosując oznaczenie $\Delta_M x$ a nie tradycyjne Δx dla od różniczenia od niepewności wzorcowania). Przyjmujemy, że niepewność maksymalna jest rów-



noważna wprowadzonej w normach ISO niepewności rozszerzonej $U(x) = k \cdot u(x)$, z współczynnikiem rozszerzenia $k = 3$. Korzystając z takiej interpretacji wyrażamy niepewność standardową typu B wzorem:

$$u(x) = \frac{1}{3} \Delta_M x. \quad (2)$$

8. W przypadku, gdy w nauczaniu szkolnym brakuje podstaw matematycznych do konsekwentnego obliczania niepewności standardowej wyniku końcowego na podstawie wyników i niepewności standardowych pomiarów bezpośrednich, to zgodnie z dotychczasową praktyką będziemy obliczać niepewność maksymalną wyniku końcowego, a niepewność standardową wyniku końcowego obliczamy w sposób podany w punkcie 7.

Związki liniowe i ich interpretacja graficzna

Proporcjonalność zmiennych x i y wyraża związek:

$$y = ax, \quad (3)$$

Na wykresie związek ten przedstawiony jest linią prostą, która tworzy tym większy kąt z osią x , im większą wartość ma współczynnik proporcjonalności a zwany również **nachyleniem prostej**. Jeśli zmienne x i y są dwiema różnymi wielkościami fizycznymi, nachylenie a nie jest wielkością bezwymiarową i nie może być interpretowane jako tangens kąta na wykresie. Występowanie proporcji typu (3) pomiędzy wielkościami fizycznymi stanowi treść wielu praw fizycznych:

W ruchu jednostajnym przebyta droga s jest proporcjonalna do czasu t :

$$s = vt. \quad (a)$$

W zjawisku sprężystości naprężenie σ jest proporcjonalne do względnego wydłużenia ε :

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (b)$$

W ruchu harmonicznym wydłużenie sprężyny x jest proporcjonalne do przyłożonej siły F i przeciwnie skierowane:

$$F = -kx. \quad (c)$$

W zjawiskach cieplnych wydłużenie δl jest proporcjonalne do przyrostu temperatury δT :

$$\delta l = \alpha \cdot \delta T. \quad (d)$$

W dziedzinie elektryczności natężenie prądu I płynącego przez opornik jest proporcjonalne do przyłożonego napięcia U :

$$U = RI. \quad (e)$$

W optyce kąt α skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła jest proporcjonalny do grubości l warstwy ciała optycznie czynnego:

$$\alpha = kl. \quad (f)$$

W przykładzie (a) czas t pełni rolę odciętej, czyli zmiennej x , a przebyta w tym czasie droga s – zmiennej y , czyli rzędnej. Jednostką czasu jest sekunda, a jednostką drogi – metr. Można użyć jednostek wielokrotnych, podwielokrotnych lub pozaukładowych, np. godzin. Przed rozpoczęciem wykreślenia trzeba dobrać długości jednostek na osiach współrzędnych. Zmiana długości jednostki pociąga za sobą zmianę kąta, jaki tworzy prosta z osią x . Swoją wymiar ma także współczynnik proporcjonalności, w naszym przykładzie $v = s/t$ ma wymiar m/s.

Podkreślamy mylące znaczenie interpretacji matematycznej, w której identyfikuje się nachylenie prostej z tangensem kąta, jaki prosta tworzy z osią x . W naszym przykładzie stosunek s/t ma wymiar metr na sekundę. Tangens zawsze jest bezwymiarowy (jest funkcją kątów, które również wymiaru w sensie fizycznym nie mają; stopień czy radian są umowną jednostką bezwymiarową; kąt w radianach jest stosunkiem długości łuku mierzonego w metrach do długości promienia wyrażonego również w metrach).

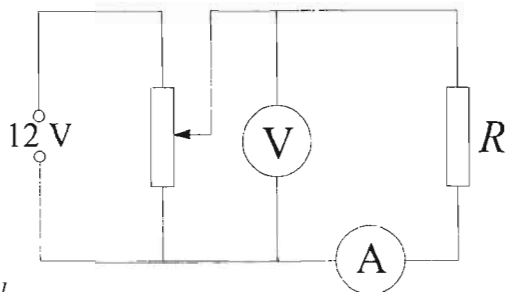
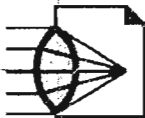
W fizyce, jak np. w przypadku zależności (a)–(f), dysponujemy wynikami pomiarów wielkości x oraz y , stanowiącymi z natury tylko przybliżenie wartości rzeczywistych, a ilościowymi miarami przybliżenia są niepewności standardowe $u(x)$ i $u(y)$. Obliczony w oparciu o wyniki doświadczalne współczynnik proporcjonalności a jest również obarczony niepewnością pomiarową, którą musimy obliczyć.

Przykład 1. Badanie charakterystyki prądowo-napięciowej opornika i wyznaczenie jego oporu elektrycznego.

Pomiary wykonano w obwodzie pokazanym na ryc. 1 (w układzie takim *de facto* pomiarowi podlega łączny opór amperomierza i badanego odbiornika).

Wyniki pomiarów zamieszczono w tabeli i przedstawiono je na ryc. 2a.

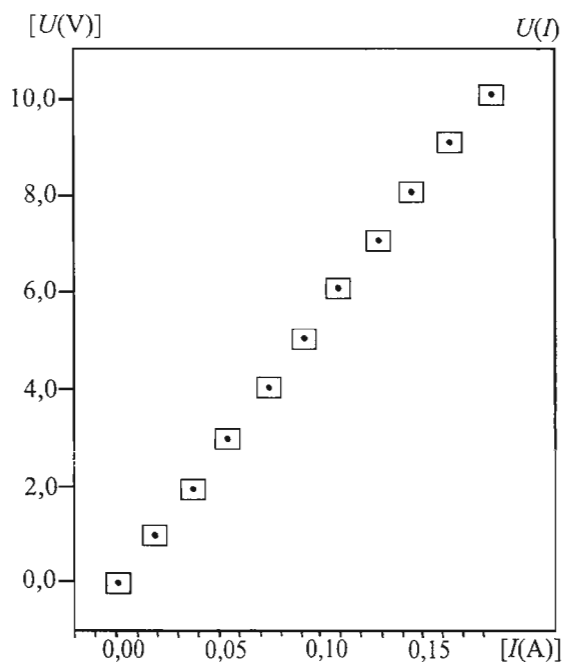




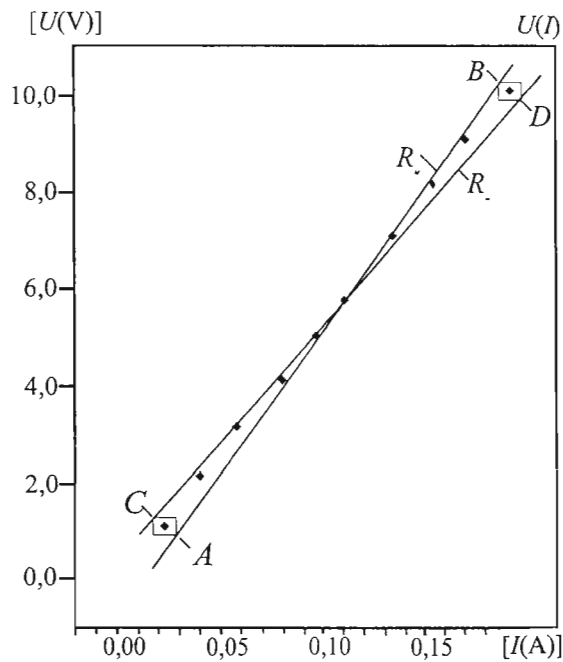
Ryc. 1

L.p.	U [V]	I [A]
1	0,0	0,000
2	1,0	0,018
3	2,0	0,036
4	3,0	0,054
5	4,0	0,074
6	5,0	0,092
7	6,0	0,110
8	7,0	0,130
9	8,0	0,147
10	9,0	0,168
11	10,0	0,188

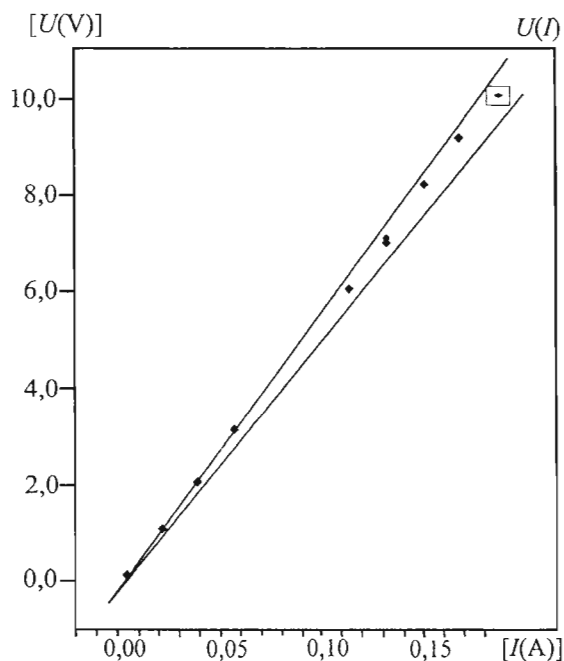
Ryc. 2



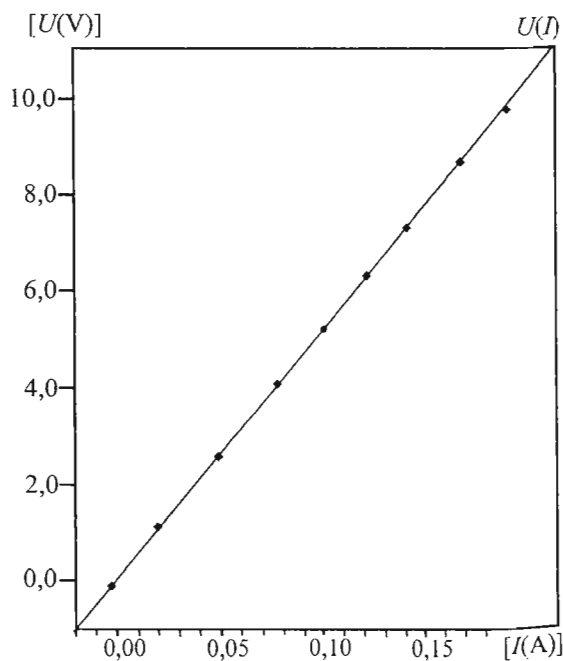
a



b



c



d



W doświadczeniu stosowano woltomierz laboratoryjny o zakresie 15V i niepewności wzorcowania $\Delta U = 0,2\text{V}$ oraz amperomierz laboratoryjny o zakresie 0,2A i niepewności wzorcowania $\Delta I = 0,005\text{A}$. Każdy punkt pomiarowy na wykresie 2a „otoczono” prostokątem niepewności o długości boków równej odpowiednio $2\Delta U$ oraz $2\Delta I$. Fakt, że punkty uzyskane z doświadczenia skupiają się wokół prostej dowodzi istnienia proporcjonalności, czyli istnienia związku nazywanego prawem Ohma wyrażonym wzorem (e), w którym współczynnik proporcjonalności R charakteryzuje własności odbiornika prądu i nazywa się oporem elektrycznym. Ten właśnie współczynnik jest równy nachyleniu prostej, którego wartości liczbowej nie możemy wyznaczyć jednoznacznie z wykresu z uwagi na rozrzut wyników i niepewności pomiarowe.

a). Obliczanie niepewności maksymalnej sposobem pierwszym.

Obliczamy w tradycyjny sposób niepewności maksymalne wyniku końcowego a jego niepewność standardową obliczamy ze wzoru (2). W naszym przykładzie niepewności wzorcowania są takie same dla wszystkich punktów, które układają się dość jednoznacznie wzdłuż prostej. Z tego powodu nie ma potrzeby zaznaczania prostokątów niepewności dla wszystkich punktów. Wystarczy je zaznaczyć dla punktów skrajnych, jak na rysunku 2b.

Jako pierwszy punkt skrajny przyjmujemy punkt nr 2 o niezerowych wartościach współrzędnych. Nachylenie prostej mieści się w granicach określonych przez prostą o najmniejszym nachyleniu, oznaczonym przez R_m i prostą o największym nachyleniu R_M . Linia o nachyleniu R_m przechodzi przez punkty A i B, a linia o nachyleniu R_M odpowiednio przez punkty C i D. Punkt A jest prawym dolnym narożem prostokąta niepewności punktu nr 2, a B – lewym górnym narożem prostokąta niepewności punktu nr 11. W podobny sposób określamy punkty C – lewe górne naroże dla punktu nr 2, a D – prawe dolne naroże punktu nr 11. Współrzędne tych punktów można odczytać z wykresu, lecz można je dokładniej obliczyć dodając lub odejmując od współrzędnych punktu pomiarowego niepewności wzorcowania; ich wartości są następujące:

$$A = (I_{11} - \Delta I; U_{11} + \Delta U) = (0,023\text{A}; 0,8\text{V})$$

$$B = (0,183\text{A}, 10,2\text{V}),$$

$$C = (0,013\text{A}, 1,2\text{V}),$$

$$D = (0,193\text{A}, 9,8\text{V}).$$

Nachylenia wynoszą:

$$R_M = \frac{U_B - U_A}{I_B - I_A} = \frac{10,2 - 0,8}{0,183 - 0,023} \frac{\text{V}}{\text{A}} = 58,75 \Omega,$$

$$R_m = \frac{U_D - U_C}{I_D - I_C} = \frac{9,8 - 1,2}{0,193 - 0,013} \frac{\text{V}}{\text{A}} = 47,78 \Omega.$$

Ostateczny wynik pomiaru oporu jest średnią arytmetyczną tych dwóch skrajnych wartości i wynosi:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{1}{2}(R_M + R_m) = \frac{1}{2}(58,75 + 47,78) \Omega \\ &= 53,265 \Omega. \end{aligned}$$

Niepewność maksymalna tego wyniku jest równa połowie różnicy skrajnych wartości

$$\begin{aligned} \Delta_M R &= \frac{1}{2}(R_M - R_m) = \frac{1}{2}(58,75 - 47,78) \Omega \\ &= 5,49 \Omega. \end{aligned}$$

Obliczamy niepewność standardową $u(R)$ ze wzoru (2). Ostateczny wynik pomiaru zaokrąglony zgodnie z normami ISO wynosi

$$\bar{R} = 53,3 \Omega, \quad u(R) = 1,8 \Omega, \quad \Delta_M R = 5,5 \Omega.$$

b). Obliczanie niepewności maksymalnej sposobem drugim.

Można opór obliczać również inaczej. Wiadomo, że prosta eksperymentalna musi przechodzić przez punkt $U = 0\text{V}$, $I = 0\text{A}$ (skoro nie przyłożymy napięcia to nie popłynie prąd). Przy takiej interpretacji dwie skrajnie nachylenie proste muszą przejść przez początek układu współrzędnych jak pokazano na rysunku 2c. Wtedy różnica nachyleń jest mniejsza. Dostaje się wyniki:

$$R_M = 55,74 \Omega, \quad R_m = 50,78 \Omega$$

i wynik końcowy:

$$\bar{R} = 53,3 \Omega, \quad u(R) = 0,8 \Omega, \quad \Delta_M R = 2,5 \Omega.$$

Sposób liczenia b) daje wynik obarczony mniejszą niepewnością pomiarową, lecz sposób ten można stosować tylko wtedy, gdy wykres



na pewno przechodzi przez punkt (0,0) i pomiary nie są obciążone błędami¹.

Zwróćmy uwagę również na to, że niepewności wzorcowania nie muszą być równe dla wszystkich punktów. Są one równe najmniejszej działce przyrządu i zmieniają się ze zmianą przyrządu pomiarowego lub zakresu pomiarowego miernika elektrycznego (porównaj przykład 2).

Linearyzacja związków nieliniowych

Ze względu na prostotę interpretacji związków liniowych (proporcji) w przypadku związków nieliniowych często stosuje się taką transformację (zamianę) zmiennych, która związek nieliniowy zamienia w liniowy. Posłużymy się przykładem jednego z najprostszych związków nieliniowych w fizyce, jakim wyraża się droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową zero:

$$s = \frac{1}{2}at^2. \quad (4)$$

Jest to przykład zależności o ogólnej budowie

$$y = hx^2, \quad (5)$$

gdzie h jest współczynnikiem proporcjonalności. Związki (4) i (5) są związkami kwadratowymi, a odpowiadająca im krzywa jest parabolą. Związki te możemy przekształcić w związek liniowy typu (3) przez podstawienie:

$$z = t^2 \quad \text{lub} \quad z = x^2 \quad (6)$$

Wykres dla nowych zmiennych jest linią prostą o nachyleniu

$$h = \frac{1}{2}a. \quad (7)$$

Przykład 2. Badanie ruchu jednostajnie przyspieszonego.

Badano ruch jednostajnie przyspieszony ciężarka wprawiającego w ruch obrotowy wahadło Oberbecka. Położenie ciężarka obser-

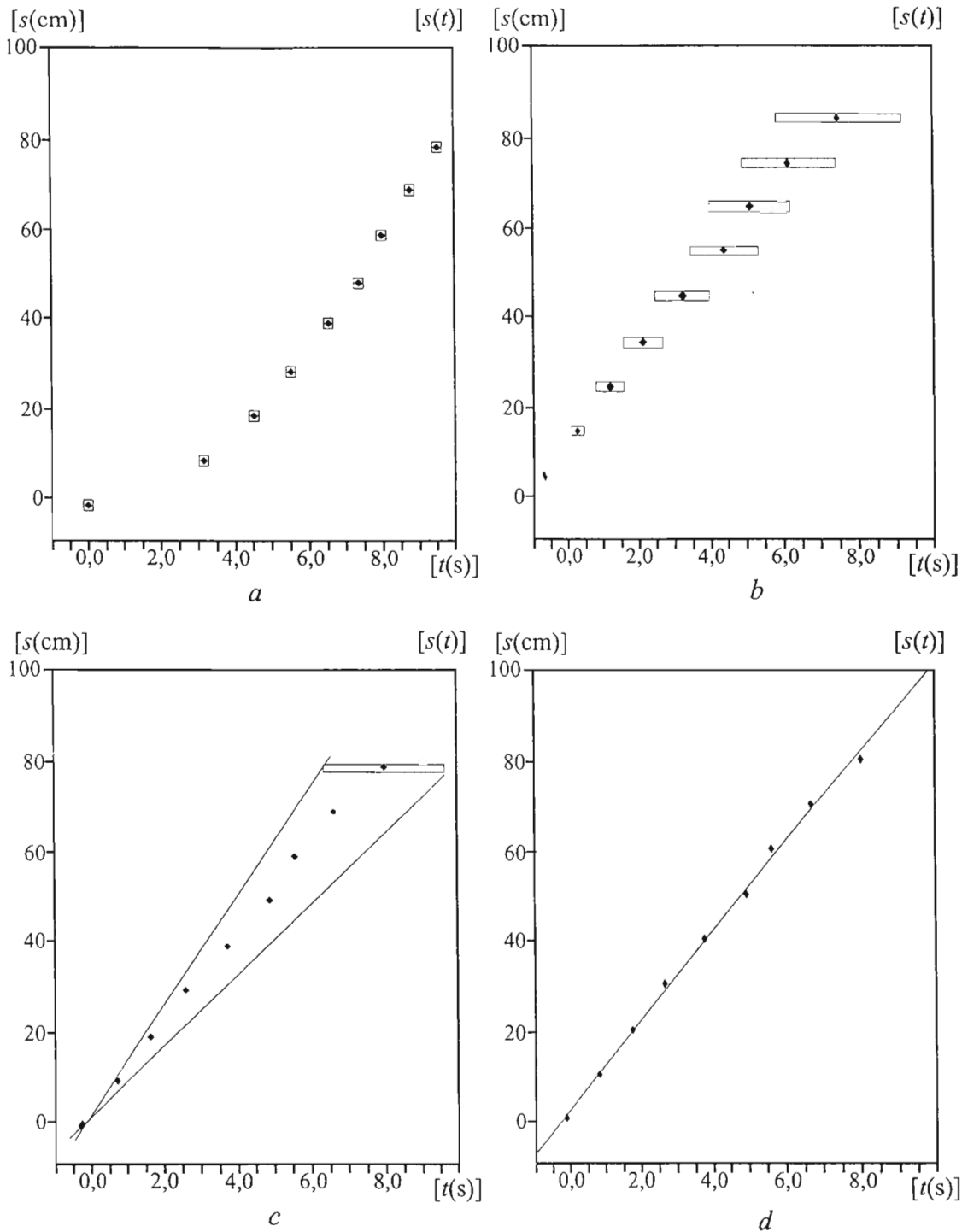
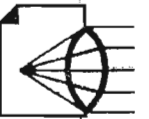
wowano na tle podziałki centymetrowej o niepewności wzorcowania $\Delta s = 1$ cm, a czas mierzono sekundomierzem o niepewności wzorcowania $\Delta t = 0,1$ s. Dla każdego z pomiarów powtarzano ruch wahadła z tym samym położeniem początkowym ciężarka odpowiadającym wskazaniu na podziałce $s = 0$ cm. Sekundomierz włączano w chwili zwolnienia wahadła, a zatrzymywano w chwili przejścia ciężarka przez podziałkę odpowiadającą punktowi pomiarowemu. Tak zwane surowe wyniki pomiarów (czyli nieprzetworzone) zamieszczono w pierwszych trzech kolumnach tabeli i pokazano na ryc. 3a, na której zaznaczono prostokąty niepewności wzorcowania.

L.p. (1)	s [m] (2)	t [s] (3)	$z = t^2$ [s ²] (4)	Δz [s ²] (5)
1	0,00	0,0	0,0	0
2	0,10	3,2	10,2	2
3	0,20	4,5	20,3	4
4	0,30	5,5	30,3	6
5	0,40	6,5	42,3	8
6	0,50	7,4	54,8	10
7	0,60	7,9	62,4	12
8	0,70	8,6	74,0	14
9	0,80	9,4	88,4	18

Punkty dość jednoznacznie wyznaczają przebieg krzywej, a mimo tego dopasowanie krzywej kwadratowej przez dobór właściwej wartości przyspieszenia nie jest zadaniem łatwym. W celu ułatwienia zadania dokonano linearyzacji podstawiając nową zmienną $z = t^2$. W tabeli w kolumnie 4 podano obliczone wartości nowej zmiennej z . W układzie współrzędnych $s(z)$ wykonano nowy wykres 3b. Uzyskano na nim rzeczywiście zależność liniową. Pewną trudność stanowi określenie niepewności pomiarowych nowej zmiennej z . Do związku (6) trzeba zastosować metodę różniczki zupełnej, jak w przypadku pomiarów pośrednich:

$$\Delta z = 2t\Delta t. \quad (8)$$

¹ Przykładem błędu jest błąd wskazania zerowego miernika. Powinien on wskazywać zero wtedy, gdy prąd nie płynie. Jeżeli wtedy miernik zera nie wskazuje, to odczytane wskazanie jest równe błędowi, który trzeba odjąć od wszystkich „surowych” wyników, by otrzymać wyniki poprawne. Według norm wynik pomiaru jest poprawny, to znaczy nie jest obciążony błędem, lecz jest obciążony niepewnością pomiarową.



Ryc.3

Niepewności Δz uzyskane po podstawieniu wartości podano w kolumnie 5 tabeli. Zauważmy, że wszystkie punkty wyników surowych są obarczone taką samą niepewnością (ryc. 3a). Po transformacji każdy punkt pomiarowy obarczony jest inną niepewnością na osi odczytanych. Niepewności te są bardzo duże i proporcjonalne do czasu, co uwidoczniło na rysun-

ku 3b. Zatem niepewności zmiennej z są tym mniejsze, im bliżej początku układu leży dany punkt pomiarowy. W skrajnym przypadku nie jest obarczony niepewnością punkt o współrzędnych $(0, 0)$, który jest również punktem pomiarowym. Zatem skrajne wartości nachylenia odpowiadają prostym przechodzącym przez punkt $(0, 0)$ i odpowiednio prawe dolne





lub lewe górne naroże prostokąta niepewności punktu pomiarowego o największych wartościach. Otrzymujemy następujące wyniki:

$$h_M = \frac{81 \text{ cm}}{70,4 \text{ s}^2} = 1,151 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2},$$

$$h_m = \frac{79 \text{ cm}}{106,4 \text{ s}^2} = 0,742 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2},$$

skąd

$$\bar{h} = \frac{h_M + h_m}{2} = 0,947 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2},$$

$$\Delta_M h = \frac{h_M - h_m}{2} = 0,205 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

Ze wzoru (7) obliczamy przyspieszenie, otrzymując po zaokrągleniu:

$$\bar{a} = 2\bar{h} = 1,90 \text{ cm/s}^2, \quad \Delta_M a = 0,41 \text{ cm/s}^2$$

Transformować do układu liniowego mo-

żemy wiele różnych typów zależności funkcyjnych, a przy obliczaniu niepewności nowych zmiennych transformowanych trzeba korzystać z rachunku różniczkowego. W przypadku braku znajomości tego rachunku można skorzystać z gotowych wzorów zamieszczonych w kolejnej tabeli wraz z transformacjami, z których najczęściej korzystamy w fizyce.

Statystyczna analiza związków liniowych (por. [8]–[12])

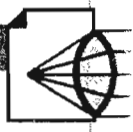
Analizą zależności liniowych zajmuje się dział statystyki matematycznej zwany analizą regresji liniowej. Równanie prostej zwanej **równaniem regresji liniowej** zapisujemy w postaci:

$$y = ax + b. \quad (9)$$

Wielkości stałe a i b nazywają się współczynnikami regresji liniowej. Współczynnik a jest równy nachyleniu prostej. Wartość współ-

Typowe transformacje linearyzujące zależności nieliniowe

Zależność przed transformacją	Zależność po transformacji	Wzory transformacyjne zmiennych i niepewności pomiarowych
$y = \alpha x^\delta$	$w = az;$	$w = y, a = \alpha, z = x^\delta$ $\Delta w = \Delta y, \quad \Delta a = \Delta \alpha,$ $\Delta z = \delta t \Delta t$
$y = \alpha x^\delta$	$w = az + b$	$w = \ln y, z = \ln x, a = \delta, b = \ln \alpha$ $\Delta w = \frac{\Delta y}{y}, \Delta z = \frac{\Delta x}{x},$ $\Delta a = \Delta \delta, \Delta b = \frac{\Delta \alpha}{\alpha}$
$y = \alpha \varepsilon^x$	$w = az + b$	$w = \ln y, z = x, a = \ln \varepsilon, b = \ln \alpha$ $\Delta w = \frac{\Delta y}{y}, \Delta z = \Delta x, \Delta a = \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon},$ $\Delta b = \frac{\Delta \alpha}{\alpha}$
$y = \frac{\delta}{x} + \varepsilon$	$w = az + b$	$w = y, z = \frac{1}{x}, a = \delta, b = \varepsilon$ $\Delta w = \Delta y, \Delta z = \frac{\Delta x}{x^2}, \Delta a = \Delta \delta,$ $\Delta b = \Delta \varepsilon$



czynnika b jest rzędną punktu przecięcia prostej z osią y . Istnieją różne rodzaje i sposoby obliczania regresji w zależności od informacji o niepewnościach standardowych punktów pomiarowych. Omówimy tylko przypadek najprostszy tzw. regresji zwyczajnej, w którym niepewności pomiarowych nie bierze się pod uwagę w sposób jawny. (Faktycznie niepewności te są uwzględnione, bo w teorii stosuje się metodę dopasowania prostej zwaną metodą najmniejszych kwadratów, w której odchylenia punktów pomiarowych od prostej o równaniu (9) decydują o odchyleniach standardowych współczynników regresji liniowej).

W omawianej metodzie wykres wykonujemy w celu jakościowego stwierdzenia istnienia zależności liniowej; punkty pomiarowe oczywiście muszą skupiać się wokół pewnej prostej. Średnią wartość współczynników regresji liniowej oraz ich odchylenia standardowe obliczamy z następujących wzorów:

$$\bar{a} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (10)$$

$$\bar{b} = \frac{\sum y_i - \bar{a} \sum x_i}{n} \quad (11)$$

$$u(a) \equiv s_a^- = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\sum y_i^2 - \bar{a} \sum x_i y_i - \bar{b} \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (12)$$

$$u(b) \equiv s_b^- = s_a^- \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \quad (13)$$

Wielkości s_a^- , s_b^- są odchyleniami standardowymi współczynników regresji liniowej i przyjmujemy, że są one równe niepewności standardowej typu A. Wszystkie sumowania przebiegają po wszystkich pomiarach, a więc od $i = 1$ do $i = n$, gdzie n oznacza liczbę par wyników.

Przykład 3. Zastosowanie metody regresji liniowej.

W przypadku wykonywania obliczeń za pomocą kalkulatora najlepiej posłużyć się ta-

belą zawierającą kolumny: $x, y, x^2, y^2, x \cdot y$ i wiersz sumowania kolumn. Wszystkie sumy występujące w równaniach (10)–(13) są zawarte w wierszu sumowania i wystarczy je podstawić do wzorów, a następnie wykonać obliczenia. Obliczenia za pomocą kalkulatora są bardzo czasochłonne i istnieje niebezpieczeństwo pomyłek. Istnieje wiele komputerowych programów obliczania regresji liniowej, do których wystarczy wprowadzić wyniki doświadczenia i odczytać wyniki końcowe obliczeń ([7]).

a) Metodę regresji liniowej zastosujemy do zlinearyzowanych wyników z przykładu 2. We wzorach (10) i (11) stosujemy oznaczenie h dla współczynnika regresji zamiast a , by w ten sposób nawiązać do oznaczeń przykładu 2. Wyniki wykonanych komputerowo obliczeń są następujące:

$$\bar{h} = 0,9158 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}, \quad s_h = 0,016 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \equiv u(\bar{h})$$

Jak widać współczynnik \bar{h} , czyli nachylenie, jest obarczony znacznie mniejszą niepewnością niż w przykładzie 2. Podkreślmy, że są to niepewności standardowe typu A. Obliczamy stąd przyspieszenie z wzoru (7) otrzymując wynik:

$$\bar{a} = 1,832 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}, \quad u(\bar{a}) = 0,032 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

Interpretacji dodatkowej wymaga wynik obliczenia współczynnika regresji \bar{b} . Wiedza fizyczna jak i wykres wskazują, że prosta powinna przebiegać przez punkt $(0, 0)$. Uzyskany z obliczeń wynik nie jest wprawdzie zerowy, lecz nie jest sprzeczny z rzeczywistością i wynikami pomiarów, bowiem z reguły w takich sytuacjach dla \bar{b} otrzymujemy bardzo małą wartość obciążoną dużym odchyleniem standardowym względnym s_b^-/\bar{b} . W naszym przykładzie wyniki są następujące:

$$\bar{b} = 1,1 \text{ cm}, \quad s_b^- = 0,8 \text{ cm} \equiv u(\bar{b}),$$

$$s_b^-/\bar{b} = 0,73 \quad (= 73\%)$$

Wartość, w jakiej prosta regresji przecina oś s , wynosi 1,4 odchylenia standardowego s_b^- . Jest to wartość dwukrotnie mniejsza od niepewności rozszerzonej $U(\bar{b}) = ku(\bar{b})$ dla $k = 3$, czyli $U(\bar{b}) = 2,4 \text{ cm}$. Takie odstępstwo jest

w pełni usprawiedliwione, bo mieści się w granicach niepewności rozszerzonej, którą przecież określiliśmy jako równoważną niepewności maksymalnej $\Delta_M \bar{b} = U(\bar{b})$ dla $k = 3$. Odstępstwo jest spowodowane niepewnościami punktów pomiarowych. Prostą regresji pokazuje rysunek 3d.

b) Regresję liniową można zastosować również do wyników z przykładu 1. Otrzymuje się wtedy następujące wyniki końcowe:

$$\bar{R} = 53,6 \, \Omega, \quad s_{\bar{R}} = 0,4 \, \Omega \equiv u(R),$$

$$\bar{b} = 0,06 \, \text{V}, \quad s_{\bar{b}} = 0,04 \, \text{V}$$

Jak widać, niepewności pomiarowe wyniku są mniejsze niż z wynikające z obliczeń niepewności maksymalnej. Prostą regresji pokazuje rysunek 2d.

LITERATURA:

- [1] Henryk Szydłowski, *Pomiary Fizyczne. Podręcznik dla nauczyciela*, PWN Warszawa 1977.
 [2] Bogusław Piątek, *Algorytm przeprowadzania po-*

miarów i szacowania niepewności pomiarowych, „Fizyka w Szkole” 1/1976.

[3] *Syllabus, Matura z fizyki z astronomią 2002*, materiały Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, Warszawa 2000.

[4] *Wyrażanie niepewności pomiaru*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999;

[5] *Guide to Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1995.

[6] H. Szydłowski, *Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarowych w nauczaniu*, „Fizyka w Szkole” 4/2000.

[7] Zbigniew Fojud, *Programy obliczeniowe regresji liniowej*, w przygotowaniu do upowszechnienia, Wydział Fizyki UAM.

[8] Z. Pawłowski, *Statystyka matematyczna*, PWN Warszawa 1968 i następne wydania.

[9] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędów pomiarowego*, PWN Warszawa 1995.

[10] H. Hänsel, *Podstawy rachunku błędów*, WNT Warszawa 1968.

[11] H. Szydłowski i inni, *Teoria pomiarów*, PWN Warszawa 1973.

[12] J. Czermiński i inni, *Metody statystyczne w doświadczeniach chemicznych*, PWN Warszawa 1974 i następne wydania. ■