Zad. M 04	**I PRACOWNIA FIZYCZNA** **Instytut Fizyki US**
Temat:	**Wyznaczanie momentu bezwładności brył metodą wahadła fizycznego. Doświadczalne potwierdzenie twierdzenia Steinera.**

Cel: zapoznanie się z ruchem drgającym wahadła fizycznego grawitacyjnego i analizą jego ruchu. Wyznaczenie wartości momentu bezwładności brył sztywnych przez pomiar okresu drgań. Doświadczalne potwierdzenie twierdzenia Steinera. Kształcenie samodzielności w posługiwaniu się aparaturą pomiarową oraz umiejętności analizy i interpretacji wyników pomiarów.

Przyrządy: pręt, krążek (walec), suwmiarka analogowa i/lub cyfrowa, miarka zwijana, stoper.

1. ZAGADNIENIA

1. Prawa dynamiki bryły sztywnej. Moment siły. Moment bezwładności.
2. Drgania harmoniczne proste. Związek okresu drgań bryły z jej momentem bezwładności i momentem kierującym..
3. Twierdzenie Steinera.

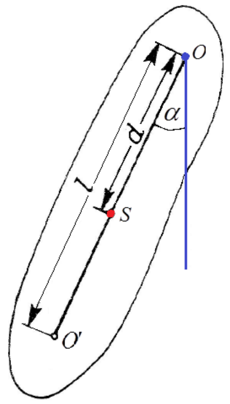
2. OPIS ZAGADNIENIA

Na podstawie literatury – podręczniki akademickie, poz. [2] zapoznać się z zagadnieniem i wyprowadzeniami wzorów.

Jedną z metod wyznaczania momentu bezwładności ciała jest pomiar okresu drgań wahadła fizycznego. Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną mogącą wykonywać obroty dokoła poziomej osi, przechodzącej ponad środkiem ciężkości bryły. Rys. 1 przedstawia wahadło fizyczne obracające się wokół poziomej osi przechodzącej przez punkt O (prostopadłej do płaszczyzny rys.) oddalonej o d od środka masy S. Gdy wahadło wychylimy o mały kąt α wówczas działa na bryłę działa moment siły ciężkości M ciała o masie m

$$M = -mgd\sin\alpha, \tag{1}$$

który stara się obrócić wahadło w stronę położenia równowagi oraz przeciwnie do wychylenia (na co wskazuje znak „–”).



Rys. 1. Schemat wahadła fizycznego;
niebieska kropka oznacza oś obrotu,
czerwona kropka oznacza środek masy;
S – środek ciężkości wahadła;
O – punkt zawieszenia;
O' – środek wahań wahadła fizycznego;
$d = OS$ – odległość punktu zawieszenia od środka ciężkości wahadła;
$l = OO'$ – długość zredukowana wahadła fizycznego.

Jeżeli założymy, że kąt odchylenia jest mały, wówczas $\sin\alpha \approx \alpha$. Moment siły M działającej na wahadło można wyrazić wzorem

$$M = -D\alpha, \tag{2}$$

gdzie $D = mgd$ nazywa się *momentem kierującym*.

Równanie ruchu wahadła będzie miało postać

$$I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -D\alpha \tag{3}$$

gdzie I jest momentem bezwładności wahadła względem osi obrotu przechodzącej przez punkt zawieszenia O,
lub w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{I}\alpha = 0\,. \tag{4}$$

Równanie to ma tą samą postać co równaie ruchu harmonicznrgo prostego. Opisuje ono drgania harmoniczne o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\,. \tag{5}$$

Ten sam okres T będzie miało whadło matematycznym o długości

$$l = \frac{I}{md}, \tag{6}$$

ponieważ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{7}$$

Wyrażenie (6) nosi nazwę *długości zredukowanej wahadła fizycznego*. Jeśli na przedłużeniu linii OS – rys. 1, odłożymy $OO' = l$, otrzymamy punkt O', zwany środkiem wahań wahadła fizycznego. Można wykazać, że jeśli zamienimy punkt zaczepienia wahadła na O', to punkt O będzie nowym środkiem wahań wahadła fizycznego i okresy wahań będą takie same. Własność tą wykorzystuje się w tzw. *wahadle rewersyjnym*.

Z twierdzenia Steinera o momencie bezwładności mamy

$$I = I_S + md^2, \tag{8}$$

gdzie I_S oznacza moment bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez jego środek ciężkości S i równoległej do osi przechodzącej przez punkt O.

Stąd i z (5) mamy

$$I_S = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2} - md^2\,. \tag{9}$$

Dla niektórych brył symetrycznych moment bezwładności względem osi symetrii prostopadłej do przekroju kołowego o promieniu r możemy zapisać w postaci

$$I_S = kmr^2, \tag{10}$$

gdzie k jest równe: 1 dla cienkościennej obręczy; 2/5 dla kuli; 1/2 dla walca.

Wzór ten możemy rozszerzyć dla wydrążonego walca (pierścienia) o promieniu zewnętrznym R_z i wewnętrznym R_w przyjmując za r^2 w (10)

$$r^2 = R_\mathrm{z}^2 + R_\mathrm{w}^2. \tag{11}$$

Podobnie, jeśli w (10) za r przyjmiemy długość cienkiego pręta to współczynnik $k = 1/12$ względem osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do długości pręta.

Zatem wyznaczenie momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy za pomocą wzoru (9), przy wyprowadzeniu którego skorzystaliśmy z twierdzenia Steinera, może ograniczyć się do wyznaczenia samego współczynnika k. Mianowicie, podstawiając (10) do (9) otrzymujemy

$$k = \frac{gdT^2}{4\pi^2 r^2} - \frac{d^2}{r^2}\,. \tag{12}$$

Zwróćmy też uwagę, że skoro prawa strona w (12) jest stała, to wartość ta nie zależy od wybranej osi obrotu tj. odległości d; jest to tak zwany niezmiennik wahadła fizycznego. Zatem możemy też doświadczalnie, z dokładnością do niepewności pomiaru, potwierdzić twierdzenie Steinera dla różnych osi obrotu tj. odległości d.

Dla badania zależności najprościej jest je przedstawić w postaci funkcji liniowej. Zauważmy, że (12) możemy zapisać w postaci

$$y = ax + b, \tag{13}$$

o ile przyjmiemy:

$$y = \left(\frac{d}{r}\right)^2, \quad x = \frac{dT^2}{r^2}, \quad a = \frac{g}{4\pi^2}, \quad b = -k. \tag{14}$$

Wybór zmiennych w (14) może być inny, jednak taki jest szczególnie dogodny gdyż wartości a i b w (14) otrzymane z danych, z wykresu możemy łatwo zweryfikować ze znajomości stałych g i π dla współczynnika kierunkowego oraz z wartości teoretycznej k dla wyrazu wolnego.

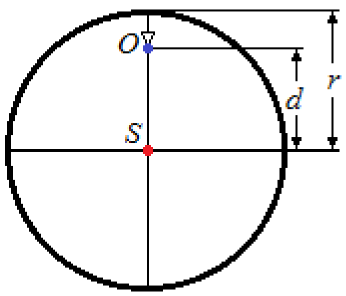
3. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

A. Metody pomiarów.

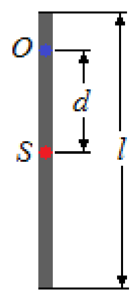
W doświadczeniu mamy dwie możliwości badawcze. Pierwsza dotyczy metody opartej na równaniu (12) a druga metoda jest oparta na zbadaniu zależności liniowej dla zmiennych przyjętych we wzorach w (14).

Metoda 1

Badanymi bryłami są tarcza (walec), pierścień (kołowa tarcza z wyciętym kołowym środkiem) i pręt. Tarcza – rys. 2a, posiada pryzmę do zawieszenia na ramie, pręt – rys. 2b, posiada otworek do umieszczeniaw w nim pręcika i zawieszenia. Tarcza kołowa z wyciętym srodkiem posiada haczyk do zawieszenia. Ze wzoru (12) widać, że w tym doświadczenia należy zmierzyć odległość OS – rys. 2 i wymiary brył oraz wyznaczyć okres T z czasu wahnięć wahadła.



Rys. 2a. Tarcza o promieniu r.



Rys. 2b. Pręt o długości l.

Ozn.: O – punkt zawieszenia bryły, S – środek masy bryły.

Metoda 2 (porównaj z [2]).

Badanymi bryłami są tarcza (walec) i pręt z otworkami dla wsunięcia pręcika jako osi obrotu. Podobnie jak w metodzie 1 należy wyznaczyć te same wielkości jednak dla kilku różnych wartości d – odległości punktu zawieszenia od środka masy wahadła co realizujemy poprzez zmianę zawieszenia wahadła dla innego otworka. Planowana liczba danych pomiarowych dla różnych wartości d, powinna dać dość dobrą możliwość wykreślenia prostej – r. (13).

B. Wykonanie doświadczenia.

Zakres zadań (ile brył, metoda) zostanie podany przez prowadzącego.

1. Zmierzyć kilkakrotnie potrzebne wymiary brył: średnica tarczy, tarczy z otworem – średnica zewnętrzna i wewnętrzna, długość pręta.

2. Zmierzyć kilkakrotnie potrzebne odległości punktu zawieszenia od środka ciężkości wahadła. Jednym ze sposobów jest wyznaczenie d z różnicy wymiarów średnicy czy długości pręta i odległości od brzegu bryły.
3. Zawiesić wahadła (stelaż).
4. Przećwiczyć odchylanie o mały kąt, puszczanie wahadła, zliczanie pełnych drgań (jedno wahnięcie jest tam i z powrotem) – robimy to przy przejściu wahadła przez położenie równowagi w jedną stronę. W miejscu pomiaru czasu i zliczania wahnięć ustawić znacznik.

   Uwaga: W sytuacjach trudnych przy zliczaniu wahnięć skorzystać z licznika (kalkulator z kontaktronem i magnesik zawieszony na wahadle).
5. Wychylić wahadło z położenia równowagi o niewielki kąt (kilka stopni) i zmierzyć kilkakrotnie (min. 2-3x) czas dla 10 lub 20 pełnych wahnięć (wybór ilości i wielokrotności dopasować do dysponowanego czasu i założonej dokładności).
6. Pomiary i czynności opisane w punktach 3-5 powtórzyć dla pozostałych dwóch wahadeł.
7. Zanotować dokładności użytych przyrządów pomiarowych.
8. W przypadku metody 2 wykonujemy pomiary z p. 5 dla kilku odległości d.

Uwaga: Wielokrotność pomiarów powinna być dobrana do założonej dokładności wyznaczenia wartości.

4. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

A. Wyznaczenie wartości pomiarowych.

1. Obliczyć wartości średnie wielkości r, R_z i R_w, l, d, T dla danych z pomiarów badanych brył.
2. Obliczyć wartość współczynnika k – wzór (12) dla metody 1, dla metody 2 również wartości x i y określone w (14).
3. Przedstawić na wykresie zależność $y = f(x)$ (wg wzorów (14)) – na papierze milimetrowym z zaznaczeniem odcinków niepewności o ile będzie to możliwe. Z wykresu wyznaczyć wartość a i b.
4. Stosując metodę regresji liniowej – komputerowo, wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej a i współczynnik b (wzory (13)-(14)).

B. Niepewności pomiaru.

1. Obliczyć niepewności pomiaru wartości średnich wielkości z p. A.1.
2. Oszacuj niepewność pomiaru wartości k obliczonej w p. A.2. Można skorzystać z metody elementarnej obliczenia złożonej niepewności standardowej.
3. Odnieść obliczone wartości do wartości teoretycznych dla k – metoda 1 i 2 oraz wartości tablicowej dla g – metoda 2. Skorzystać z kryterium zgodności.
4. Oszacuj niepewność pomiaru wartości k i g na podstawie wykresu odręcznego.

C. Zestawienie wyników i niepewności pomiaru.

5. Przeanalizować wyniki, porównać wartości dla *k* otrzymane w p. A; zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia.

1. Porównać uzyskane wartości z p. A.2 – A.4. Odnieść obliczone wartości do wartości teoretycznych dla k – metoda 1 i 2 oraz wartości tablicowej dla g – metoda 2. Skorzystać z kryterium zgodności.

   Uwaga: Dla małej próby zastosować współczynniki $t_{n,\alpha}$ Studenta przy poziomie ufności $\alpha = 0,95$. Współczynnik ten przyjąć dla niepewności rozszerzonej.
2. Przeanalizować źródła ewentualnych rozbieżności.
3. Zapisać wnioski i uwagi dotyczące przebiegu doświadczenia i jego realizacji.

LITERATURA

1. Podręczniki akademickie z fizyki np. A.Piekara – *Mechanika ogólna*, Sz.Szczeniowski – *Fizyka doświadczalna* cz. 1. *Mechanika i akustyka*.
2. *Wyznaczanie momentu bezwładności ciał metodą wahadła fizycznego grawitacyjnego i sprawdzanie twierdzenia Steinera*. http://lpf.wppt.pwr.edu.pl/opisy/cw001.pdf
3. Zadania z olimpiady fizycznej, było wiele dotyczących momentu bezwładności, np. dla wyznaczania z wykorzystaniem wahadła fizycznego: *Wyznaczanie momentu bezwładności bryłki* – 16 OF; *Wyznaczanie współczynnika k wahadła fizycznego* – 31 OF; *Wyznaczanie momentu bezwładności banana* – 54 OF. Zadania dostępne ze strony: www.of.szc.pl zakładka: Zadania. www.of.szc.pl/index.php?strona=32

Niepewność pomiaru

Złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ wielkości obliczanej pośrednio y oblicza się korzystając z **prawa przenoszenia niepewności** pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}[c_i u(x_i)]^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)}$$

gdzie N – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio, c_i – współczynnik wrażliwości, $u_i(y) \equiv c_i\, u(x_i)$ – udziały niepewności.

Złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ można obliczyć też z zalecanego przez *Przewodnik GUM* wzoru, zastępując w powyższym równaniu $(\partial f/\partial x_i)u(x_i)$ przez:

$$Z_i = \frac{1}{2}\left[f\left(x_1,\dots,x_i+u(x_i),\dots,x_N\right) - f\left(x_1,\dots,x_i-u(x_i),\dots,x_N\right)\right]. \qquad (*)$$

To znaczy, że wartość $u_i(y)$ ($\equiv (\partial f/\partial x_i)u(x_i)$ – udziały niepewności) wyznacza się obliczając zmianę spowodowaną zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$. Jako wartość $u_i(y)$ przyjmuje się $|Z_i|$ (jako wartość odpowiedniego współczynnika wrażliwości przyjmuje się $Z_i/u(x_i)$), wówczas $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} Z_i^2$.

Wzór (*) wykorzystuje różnice (przyrosty) skończone w miejsce formuły z pochodną, co umożliwia jego stosowanie bez znajomości rachunku różniczkowego.

Porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z wynikiem tablicowym x^T, korzystamy z przedziałowego ***kryterium zgodności wyników pomiarów***, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - x^T\right| \le u(\bar{x}) + u(x^T)\,.$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną U*. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.