

<b>Zad. M 03</b>	<b>I PRACOWNIA FIZYCZNA</b> <b>Instytut Fizyki US</b>
<b>Temat:</b>	<b>Wyznaczanie współczynnika lepkości cieczy</b>

*Cel:* Pomiar współczynnika lepkości cieczy (gliceryny) na podstawie wzoru Stokesa z uwzględnieniem poprawki wpływu ścianek cylindra (wzór Ladenberga) podczas spadku kulek. Wyznaczenie liczby Reynoldsa. Praktyczne zapoznanie się z prawami ruchu ciał w płynach i ich opisem.

*Przyrządy:* Naczynie cylindryczne z gliceryną, zestaw kulek (przezroczyste kulki do adherencji o śr. 1 mm, 2 mm, 3 mm ; ew. kulki do karabinków), lejek do puszczenia kulek, lampa do oświetlania kulek, śruba mikrometryczna o rozdzielczości 0,001 mm, miarka liniowa, stoper, waga o rozdzielczości 0,01 g lub 0,001 g, termometr, areometr lub piknometr.

## 1. ZAGADNIENIA

1. Zasady dynamiki Newtona.
2. Prawo Archimedesesa, zasada działania areometru.
3. Ruch ciała w płynie, współczynnik lepkości płynu i jego jednostka, prędkość graniczna, liczba Reynoldsa, prawo Stokesa, wzory uwzględniające wpływ ścianek na ruch kulki w cylindrze.

## 2. OPIS ZAGADNIENIA

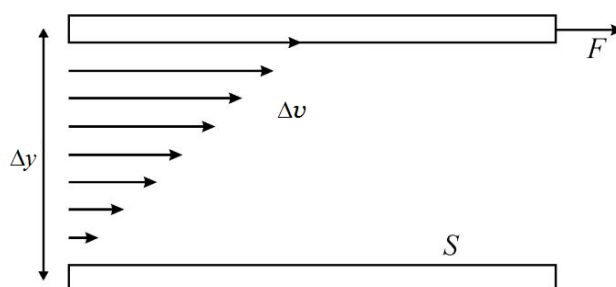
### A. Wprowadzenie

Ruch ciała w cieczech i gazach (ogólnie płynach) ma duże znaczenie praktyczne, wszak wszystkie ciała w naszym otoczeniu poruszają się w powietrzu. Przy ruchu ciała w płynie, na skutek występowania sił międzycząsteczkowych, przylega do jego powierzchni warstwa cieczy i jest ona przez tę powierzchnię unoszona. Następna warstwa jest unoszona przez ciało ale już z mniejszą prędkością. Tak więc podczas ruchu ciała w płynie powstają w niej siły tarcia wewnętrznego zwane siłami lepkości.

Między przesuwanymi względem siebie warstwami płynu działają styczne do nich siły tarcia wewnętrznego. Wartość siły jaką wywierają na siebie nawzajem dwie sąsiadujące ze sobą warstwy płynu, jest proporcjonalna do iloczynu ich powierzchni styku  $S$  i gradientu prędkości  $(\Delta v/\Delta y)$  i opisana wzorem empirycznym podanym przez Newtona:

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta y}, \quad (1)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności  $\eta$  – współczynnik lepkości dynamicznej cieczy (lepkość).



Rys. 1. Rozkład prędkości płynu pomiędzy dwoma płaskimi, równoległymi, poruszającymi się względem siebie elementami.

Współczynnik lepkości ośrodka zależy od temperatury. Dla gazów rośnie proporcjonalnie do temperatury bezwzględnej. Dla cieczy zmniejsza się znacznie ze wzrostem temperatury. Bardzo silną zależność temperaturową obserwuje się dla cieczy o dużej lepkości jak np. dla gliceryny czy olejów silnikowych.

Płyny, które nie spełniają zależności (1), zwane są płynami nienewtonowskimi. Dla nich współczynnik lepkości nie jest stały, jest funkcją gradientu prędkości.

Z podanego wzoru (1) wynika, że jednostką tego współczynnika jest:

$$[\eta] = \left[ \frac{(F/S)}{(\Delta v/\Delta y)} \right] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Dawniej stosowaną jednostką, spoza układu SI, był puaz – ozn. P:  $1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

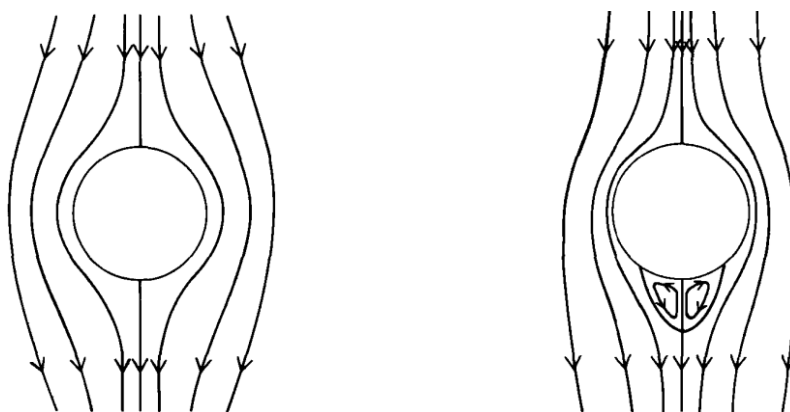
## B. Spadanie kuli w cieczy lepkiej w zakresie opływu laminarnego

Ciało stałe, poruszające się w ośrodku ciekłym, napotyka na opór. W otoczeniu ciała obserwujemy wtedy ruch cieczy. Trajektorie cząsteczek cieczy wokół poruszającej się kuli przedstawia Rys. 2. Kiedy ciecz opływająca kulę nie tworzy żadnych wirów czy turbulencji to mamy opływ laminarny, występujący przy małych prędkościach – rys. 2a.

Podstawowe kryterium dotyczące charakteru (stateczności) ruchu cieczy związane jest z wartością liczby Reynoldsa z definiowaną jako:

$$\text{Re} = \frac{vl\rho_c}{\eta}, \quad (2)$$

gdzie  $v$  – prędkość charakterystyczna cieczy,  $l$  – wymiar charakterystyczny ciała,  $\rho_c$  – gęstość cieczy,  $\eta$  – lepkość dynamiczna cieczy.



Rys. 2. Spadanie kulki w cieczy lepkiej

- |  |  |
|--|--|
| a) ruch laminarny $\text{Re} \ll 1$ ,<br>ciecz opływająca kulę nie tworzy<br>żadnych wirów czy turbulencji | b) ruch nielaminarny $\text{Re} \gg 1$ ;<br>ciecz opływająca kulę tworzy<br>wiry |
|--|--|

Na kulkę poruszającą się z prędkością  $\vec{v}$  działa siła oporu czołowego  $\vec{F}_{\text{op}}$  skierowana przeciwnie do wektora prędkości  $\vec{v}$ . Siłę oporu czołowego przy ruchach ciał w płynach najczęściej opisuje się za pomocą wzoru Newtona:

$$F_{\text{op}} = C \frac{\rho_c v^2}{2} S, \quad (3)$$

gdzie  $S$  wartość rzutu pola powierzchni ciała na płaszczyznę prostopadłą do wektora prędkości a  $C$  – bezwymiarowy współczynnik zależny od kształtu ciała, jego orientacji względem płynu oraz liczby Reynoldsa,  $\rho_c$  – gęstość płynu. Wartość współczynnika wyznacza się doświadczalnie, w bardzo szczególnych przypadkach – analitycznie. G.Stokes w 1851 r. znalazł rozwiązanie teoretyczne dla ruchu kulki w płynie o nieograniczonych rozmiarach i dla bardzo małych wartości liczby Reynoldsa,  $\text{Re} \ll 1$ , stwierdzając, że  $C = 24/\text{Re}$ . Ponieważ dla kulki o promieniu  $r$ :  $S = \pi r^2$  a  $l = 2r$  więc

$$F_{\text{op}} = 6\pi\eta r v. \quad (4)$$

W przypadku, gdy ruch kulki odbywa się w płynie ograniczonym rozmiarami naczynia należy wprowadzić poprawki związane z istnieniem ścianek. Przy spadku kulek wzdłuż osi cylindra o promieniu  $R$  wzór (4) zapisujemy w ogólniejszej postaci

$$F_{op} = Kv, \quad (6)$$

gdzie dość ogólną postacią jest [7] (w tej pracy można znaleźć też zakres stosowalności)

$$K = 6\pi\eta r \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-n}, \quad (7)$$

a  $n$  jest stałą, którą wyznacza się doświadczalnie.

Uwaga: Z rozwinięcia w szereg mamy

$$\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-n} = 1 + n\frac{r}{R} - \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \dots \quad (8)$$

Jeśli pominiemy wyrazy w wyższych potęgach  $r/R$  niż 1, mamy przybliżenie:

$$F_{op} = 6\pi\eta rv \left(1 + n\frac{r}{R}\right). \quad (9)$$

Dla wartości  $n = 2,4$  w (9) jest to tzw. wzór (poprawka) Ladenberga, wyprowadzony i sprawdzony doświadczalnie na początku XX wieku – ze względu na swoją prostotę jest najczęściej stosowany.

Rozpatrzmy ruch małej kulki spadającej swobodnie w cieczy lepkiej. Na kulkę działają siły zaznaczone na rys. 3. Siła wypadkowa  $F$ , działająca na ciało wynosi

$$F = Q - F_w - F_{op} \quad (10)$$

czyli

$$F = ma = mg - \rho_c gV - Kv, \quad (10a)$$

gdzie  $m$  – masa kulki,  $V$  – objętość kulki,  $\rho_c$  – gęstość cieczy.

Siła  $F$  jest malejącą. Przyczyną takiego stanu jest zwiększanie się prędkości kulki i w konsekwencji wzrost wartości siły  $F_{op}$ . Przyspieszenie  $a$  ciała maleje zatem w czasie, a prędkość dąży do wartości granicznej  $v_{gr}$ . Po osiągnięciu przez kulkę prędkości „granicznej”, porusza się ruchem jednostajnym niezależnie od prędkości początkowej. Wówczas  $F = 0$ , siła ciężkości  $Q$  jest równoważona przez sumę siły wyporu Archimedesesa i siłę oporu czołowego  $F_{op}$ . Jeżeli w chwili początkowej  $t = 0$  prędkość  $v = v_0$ , to zależność prędkości od czasu jest postaci

$$v(t) = v_{gr} + (v_0 - v_{gr}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (11)$$

gdzie  $\tau = m/K$  – stała czasowa.

Drugi wyraz po prawej stronie wzoru (11) maleje eksponencjalnie z czasem, więc dla dostatecznie dużego  $t$  jest on zanedbywalnie mały. Skutkiem tego ruch kulki – praktycznie, po czasie rzędu  $3\tau$ , staje się jednostajny z prędkością graniczną równą

$$v_{gr} = \frac{Q - F_w}{K} = \frac{2g(\rho - \rho_c)r^2}{9\eta} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n, \quad (12)$$

Wartość  $n$  możemy wyznaczyć z dwóch pomiarów prędkości granicznych  $v_1$  i  $v_2$  dla kulek wykonanych z tego samego materiału ale o różnych promieniach  $r_1$  i  $r_2$  [1]. Wówczas

$$n = \left( \ln \frac{v_1 r_2^2}{v_2 r_1^2} \right) : \left( \ln \frac{R - r_1}{R - r_2} \right). \quad (13)$$

### 3. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

#### A. Metoda pomiarów.

Pomiar wartości współczynnika lepkości wykonuje się przez opuszczenie do badanej cieczy kulki, wykonanej z materiału o gęstości większej od gęstości cieczy i zmierzenie prędkości jej opadania w pionie ruchem jednostajnym. Prędkość kulki jest wyznaczana poprzez pomiar czasu przelotu kulki na określonej drodze. Przy założeniu, że  $F = 0$  i  $v_{gr} = L/t$ , gdzie  $t$  – czas spadania kulki na drodze  $L$ , z (12) mamy

$$\eta = \frac{2g(\rho - \rho_c)r^2}{9} \cdot \frac{t}{L} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n \quad (14)$$

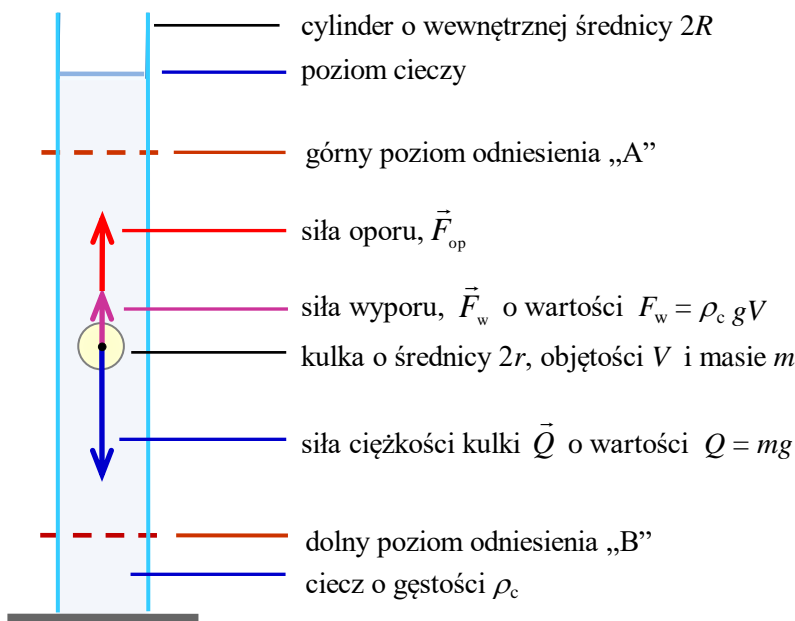
gdzie przyjmujemy  $n = 2,25$  [7].

Natomiast, korzystając ze wzoru Ladenberga mamy

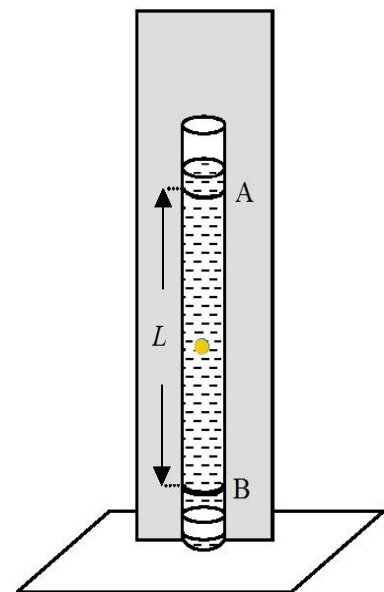
$$\eta = \frac{2g(\rho - \rho_c)r^2}{9\left(1 + 2,4\frac{r}{R}\right)} \cdot \frac{t}{L} \quad (15)$$

#### B. Układ doświadczalny.

Rysunki (3) i (4) przedstawiają schemat aparatury pomiarowej – wiskozymetr Stokesa, składający się z wysokiego szklanego cylindra wypełnionego cieczą (gliceryną), do którego wrzuca się kulki przez lejek – aby zapewnić ich osiowy spadek. Na cylindrze znajdują się dwa poziome znaczniki: górny A i dolny B w odległości  $L$  od siebie pomiędzy którymi mierzymy czas spadania kulek. Położenie górnego znacznika musi być tak dobrane poniżej powierzchni cieczy aby pomiar prędkości granicznej wykonać na odcinku drogi, na której kulka osiągnęła już ustaloną stałą prędkość. W cylindrze znajduje się sitko z uchwytem do wyciągania kulek z cylindra. Odległość pomiędzy znacznikami mierzy się przymiarem metrowym, czas ruchu kulek na tym odcinku – sekundomierzem. Kulki waży się na wadze elektronicznej, a ich promienie mierzy się śrubą mikrometryczną.



Rys. 3. Siły działające na kulkę spadającą w cieczy.  
Opis wielkości doświadczalnych.



Rys. 4. Schemat aparatury pomiarowej.  
Wiskozymetr Stokesa.

#### C. Wykonanie doświadczenia – zakres pomiarów z kulkami ustala prowadzący.

1. Wybrać po 10 kuleczek o różnych średnicach. Kulki powinny być suche i czyste.
2. Za pomocą śruby mikrometrycznej zmierzyć w kilku miejscach średnicę każdej kulki.
3. Wyznaczyć masy kuleczek o jednakowej średnicy na wadze (rozdzielczość 0,01 g lub 0,001 g).

Uwaga: Ważymy w naczyniu z tarowaniem i dorzucaniem kulek. Jeśli dostępne są kulki tego samego typu (dane producenta), to ważymy 10 kulek, średnicę kulki możemy wyznaczyć z pomiaru objętości o ile dokładność będzie wystarczająca.

4. Wyznaczyć wewnętrzną średnicę cylindra  $2R$ . Zmierzyć suwmiarką średnicę zewnętrzną każdego cylindra na różnej wysokości. Przy obliczaniu ewentualnych poprawek na efekt ścianek bocznych przyjmij, że grubość szkła jest stała i równa tej przy krawędzi. Grubość szkła ścianki cylindra zostanie podana.
5. Zaznaczyć na cylindrze poziomy odniesienia „A” i „B”, pomiędzy którymi kuleczki będą poruszać się ruchem jednostajnym. Za pomocą taśmy mierniczej zmierzyc w różnych miejscach odległość  $L$  między nimi 6-krotnie.

**Uwaga:** Położenie poziomu „A” należy sprawdzić praktycznie, też ocenić czy spełniony jest warunek, że odległość od powierzchni cieczy do poziomu A jest nie mniejsza niż  $3\tau v_{gr}$  [1]:

$$3\tau v_{gr} = 3\tau \frac{Q - F_w}{K} = 3 \frac{m}{K} v = 3 \frac{m}{K} \frac{2g(\rho - \rho_c)r^2}{9\eta} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n.$$

6. Przeciwicz dla kilku dodatkowych kuleczek ich puszczenie, obserwuj ruch. Jeśli widoczność jest za mała należy podświetlić cylinder. Oszacuj wizualnie, czy warunki ruchu są spełnione – ruch jednostajny i w osi cylindra, jeśli nie należy je osiągnąć aby rozpocząć pomiar czasu ruchu.
7. Przy pomocy stopera zmierzyc czas spadania  $t$  każdej z kuleczek – oddzielnie, na drodze  $L$ .
8. Wyznaczyć gęstość badanej cieczy  $\rho_c$  za pomocą areometru lub korzystając z piknometru. Pomiar powtórzyć 3-krotnie.
9. Zmierzyc temperaturę cieczy w cylindrze.
10. Bezpośrednio po zakończeniu pomiarów sprawdź czy wszystkie niepewności pomiarów bezpośrednich zostały zanotowane (np. pomiar mas, średnic, odległości).
11. Po zakończeniu pomiarów posprzątaj! Usuń wszelkie wycieki gliceryny, a kulki wysusz ręcznikiem papierowym.

## 4. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

### A. Wyznaczenie wartości pomiarowych.

1. Wyznaczyć średnie wartości zmierzonych wielkości oraz ich niepewności statystyczne. Dla małej próby zastosować współczynniki  $t_{n,\alpha}$  Studenta przy poziomie ufności  $\alpha = 0,95$ .
2. Wyznaczyć wartość współczynnika lepkości  $\eta$  korzystając ze wzoru (15) – o ile prowadzący nie zalecił inaczej.
3. Obliczyć współczynnik lepkości cieczy osobno dla każdego zestawu kulek korzystając ze wzoru (14) lub (15) – wg wskazań prowadzącego. (Jako wartość przyspieszenia ziemskiego w Szczecinie przyjmujemy  $g = 9,814 \text{ m/s}^2$ ).
4. Obliczyć wartości liczby Reynoldsa – wzór (2). Czy spełniony jest warunek ruchu laminarnego.
5. Obliczyć wartości prędkości kulek w cylindrze na drodze  $L$  (średnich).
6. Obliczyć – na zajęcia, wartości prędkości granicznych kulek i stałą czasową – wzór (14) przyjmując dane tablicowe i potrzebne podane przez prowadzącego.

### B. Niepewności pomiarowe.

1. Obliczyć niepewności pomiarowe.
2. Korzystając z kryterium zgodności porównać otrzymane wartości współczynnika lepkości badanej cieczy z wartością odczytaną z tablic.

### C. Zestawienie wyników i niepewności pomiarowych.

## 5. Dokonać dyskusji wyników, porównać otrzymane zależności i wartości, zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia.

### LITERATURA

1. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski: *Wstęp do fizyki*, t. 1. PWN, Warszawa 1984, rozdz. IV p. 5.2.
2. Pawlak B., Gąsowski R., Kozłowski J.: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki dla przyrodników*. Wyd. Naukowe US, Szczecin 2005.
3. H. Szydłowski: *Pracownia fizyczna*. Wyd. IX, PWN, Warszawa 1999 (lub inne wydanie).
4. T. Dryński: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. PWN, Warszawa 1980 (lub inne wyd.).
5. A. Magiera (red.): *I Pracownia fizyczna*. Wyd. IV, IF UJ 2014, <http://www.1pf.if.uj.edu.pl/documents/5046939/5227638/skrypt.pdf>
6. M. Nowina-Konopka, A. Zięba: Współczynnik lepkości. [http://www.ftj.agh.edu.pl/zdf/zeszyt/3\\_13n.pdf](http://www.ftj.agh.edu.pl/zdf/zeszyt/3_13n.pdf)
7. V. Fidleris, R.L. Whitmore, *Experimental determination of the wall effect for spheres falling axially in cylindrical vessels*, Br. J. Appl. Phys. 12 (1961) 490.
8. *Tablice zależności lepkości roztworu gliceryny w wodzie od stężenia i temperatury roztworu*. Ch. D. Hodgman, Handbook of Chemistry and Physics, 40th edition, Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio 1959. <https://www.fizyka.umk.pl/~lab2/tables/viscosit.html>

### Niepewność pomiaru

Złożoną niepewność standardową  $u_c(y)$  wielkości obliczanej pośrednio  $y$  oblicza się korzystając z **prawa przenoszenia niepewności** pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)}$$

gdzie  $N$  – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio,  $c_i$  – współczynnik wrażliwości,  $u_i(y) \equiv c_i u(x_i)$  – udziały niepewności.

Złożoną niepewność standardową  $u_c(y)$  można obliczyć też z zalecanego przez *Przewodnik GUM* wzoru, zastępując w powyższym równaniu  $(\partial f / \partial x_i) u(x_i)$  przez:

$$Z_i = \frac{1}{2} [f(x_1, \dots, x_i + u(x_i), \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i - u(x_i), \dots, x_N)]. \quad (*)$$

To znaczy, że wartość  $u_i(y)$  ( $\equiv (\partial f / \partial x_i) u(x_i)$  – udziały niepewności) wyznacza się obliczając zmianę spowodowaną zmianą  $x_i$  o  $+u(x_i)$  i o  $-u(x_i)$ . Jako wartość  $u_i(y)$  przyjmuje się  $|Z_i|$  (jako wartość odpowiedniego współczynnika wrażliwości przyjmuje się  $Z_i/u(x_i)$ ), wówczas  $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N Z_i^2$ .

Wzór (\*) wykorzystuje różnice (przyrosty) skończone w miejsce formuły z pochodną, co umożliwia jego stosowanie bez znajomości rachunku różniczkowego.

### Porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z wynikiem tablicowym  $x^T$ , korzystamy z przedziałowego **kryterium zgodności wyników pomiarów**, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$|\bar{x} - x^T| \leq u(\bar{x}) + u(x^T). \quad (12)$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność  $u$  przez **niepewność rozszerzoną**  $U$ . Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.