Zad. M 10B	**I PRACOWNIA FIZYCZNA** **Instytut Fizyki US**
Temat:	**Wyznaczanie modułu sztywności** **za pomocą wahadła torsyjnego***

* metoda nosi też nazwę metody dynamicznej.

Cel: Praktyczne zapoznanie się z drganiami wahadła torsyjnego (skrętnego) i analizą jego ruchu. Wyznaczenie wartości modułu sztywności materiału drutu za pomocą wahadła torsyjnego. Kształcenie samodzielności w posługiwaniu się aparaturą pomiarową oraz umiejętności analizy i interpretacji wyników pomiarów.

Przyrządy: Wahadło torsyjne (tzw. wibrator krzyżakowy) z dodatkowymi krążkami (obciążniki), mikrometr cyfrowy o dokładności 0,001 mm, suwmiarka cyfrowa, miarka zwijana, waga elektroniczna, stoper.

1. ZAGADNIENIA

1. Prawa dynamiki bryły sztywnej. Moment siły. Moment bezwładności. Twierdzenie Steinera.
2. Własności sprężyste ciał stałych, prawo Hooke'a, moduł sztywności.
3. Oscylator harmoniczny.

2. OPIS ZAGADNIENIA

Na podstawie literatury zapoznać się z zagadnieniem i wyprowadzeniami wzoru (1) i (3).

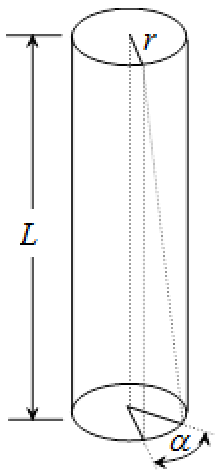
3. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

A. Metoda pomiarów.

Moduł sztywności G wyznaczany jest z badania drgań harmonicznych pręta wywołanych przez siły sprężystości – naprężenia ścinające. Konieczna jest więc znajomość związku pomiędzy modułem sztywności i momentem działających sił.

Rozważmy jednorodny pręt o przekroju kołowym, którego jeden koniec jest unieruchomiony, a drugi skręcony o kąt α pod wpływem momentu siły M (rys. 1).

W przypadku, gdy ograniczymy się do rozważań idealnie sprężystych odkształceń pręta, związek między momentem siły M a kątem skręcenia α można zapisać w postaci: $M = D\alpha$,
gdzie D jest momentem kierującym:



Rys. 1. Schemat skręconego drutu

$$D = \frac{\pi G r^4}{2L}, \qquad (1)$$

gdzie G – moduł sztywności (też: moduł Kirchhoffa) materiału z jakiego wykonany jest pręt, r – promień pręta, L – długość pręta.
Korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego dostajemy równanie wahadła torsyjnego w postaci:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -D\alpha \qquad (2)$$

gdzie I jest momentem bezwładności obciążonego wahadła.

Opisuje ono drgania harmoniczne o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = \sqrt{\frac{8\pi I L}{G r^4}}\,. \tag{3}$$

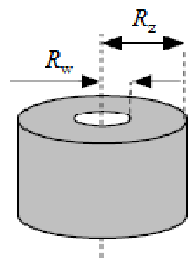
Klasyczne wahadło torsyjne stanowi drut sprężysty, którego jeden koniec zamocowany jest w nieruchomym uchwycie, a na drugim końcu zawieszone jest ciało, zazwyczaj w postaci bryły o regularnych kształtach. W tym doświadczeniu drgania torsyjne wykonuje wibrator – rys. 2, który składa się z ramy – 4 jednakowe ramiona, na których zawieszane są symetrycznie krążki (na ogół po jednym na każdym z ramion krzyżaka), których odległość od osi obrotu wibratora można zmieniać. Na moment bezwładności I wahadła składają się momenty bezwładności samej ramy – I_0 i obciążających go krążków (walców) – I_1. Jeżeli cztery jednakowe krążki (walce), każdy o masie m, znajdują się w odległości d od osi obrotu wahadła, to z twierdzenia Steinera ich moment bezwładności możemy wyrazić jako

$$I_1 = 4(I_\mathrm{w} + md^2), \tag{4}$$

gdzie $I_\mathrm{w} = mR^2/2$ jest momentem bezwładności jednego walca o masie m i promieniu R względem osi przechodzącej przez oś symetrii walca.

Uwaga: faktycznie krążek ma kształt pierścienia – rys. 2 o promieniu promieniem zewnętrzmym R_z i wewnętrznym R_w. Wówczas moment bezwładności krążka o masie m wynosi

$$I_\mathrm{k} = \frac{m}{2}\left(R_\mathrm{z}^2 + R_\mathrm{w}^2\right), \tag{5}$$



Rys. 2.

Zwróćmy uwagę, że

$$\left(R_\mathrm{z}^2 + R_\mathrm{w}^2\right) = R_\mathrm{z}^2\left(1 + \left(\frac{R_\mathrm{w}}{R_\mathrm{z}}\right)^2\right). \tag{6}$$

Zatem jeśli stosunek $R_\mathrm{w}/R_\mathrm{z}$ jest odpowiednio mały to ze względu, że jest w kwadracie w (6) człon ten można pominąć.

Zatem (3) możemy zapisać

$$T = \sqrt{\frac{8\pi L}{G r^4}\left(I_0 + 4I_\mathrm{w} + 4md^2\right)}, \tag{7}$$

lub w postaci

$$T^2 = \frac{32\pi mL}{G r^4} d^2 + \frac{16\pi mLR^2}{G r^4} + T_0^2, \tag{8}$$

gdzie

$$T_0^2 = \frac{8\pi L}{G r^4} I_0\,. \tag{9}$$

W przypadku, gdy wahadło jest bez dodatkowych krążków wówczas w (8) należy wstawić za $m = 0$ i $d = 0$. W tym przypadku $T = T_0$.

Znając okres T_0 możemy obliczyć z (8) wartość modułu sztywności G:

$$G = \frac{8\pi mL}{r^4}\,\frac{R_\mathrm{z}^2 + R_\mathrm{w}^2 + 4d^2}{T^2 - T_0^2}\,. \tag{10}$$

Zwróćmy uwagę, że (8) jest funkcją liniową kwadratu okresu drgań od kwadratu odległości krążków od osi obrotu wahadła torsyjnego. Do tego wyrażenia można dopasowć zależność

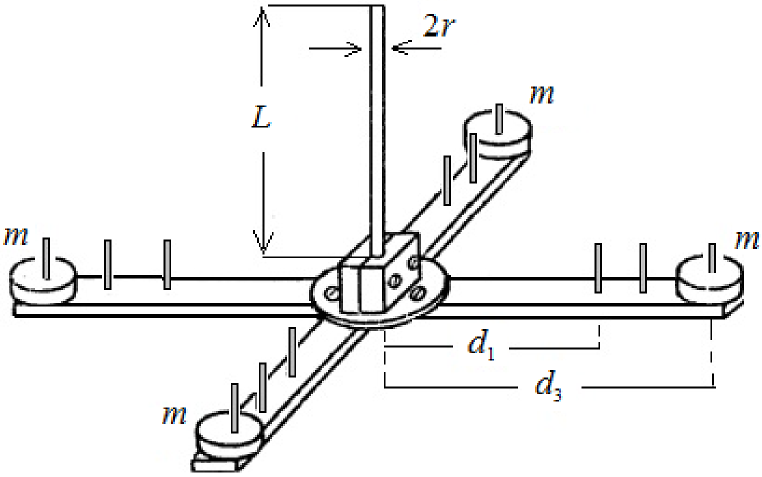
$$T^2 = ad^2 + b, \tag{11}$$

co na podstawie znajomości współczynnika kierunkowego prostej w (9) pozwala wyrazić moduł sztywności G poprzez parametr a

$$G = \frac{32\pi m L}{a r^4}. \tag{12}$$

B. Układ doświadczalny i wykonanie doświadczenia.

Schemat układu doświadczalnego z wibratorem krzyżakowym ilustruje rys. 2. Wahadło torsyjne stanowi drut stalowy, którego górny koniec jest zamocowany w nieruchomym uchwycie, a na drugim końcu zawieszony jest krzyżak mający 4 jednakowe ramiona, na nich w jednakowych odległościach zawieszane są symetrycznie krążki (po jednym lub po 2 na każdym z ramion wg ustaleń prowadzącego zajęcia).



Rys. 3. Schemat wahadła torsyjnego – wibrator krzyżakowy.

Czynności

1. Zmierzyć kilkakrotnie długość L drutu pomiędzy punktami zamocowania (przykręcenia śrubkami na łącznikach).
2. Zmierzyć wielokrotnie mikrometrem grubość $2r$ drutu na różnych wysokościach.
3. Zważyć kilkakrotnie cztery krążki (lub osiem, w zależności od obciążania ramienia jednym czy dwoma krążkami) otrzymując ich masę $4m$.
4. Zmierzyć kilkakrotnie średnicę zewnątrzną $2R_z$ i wewnętrzną $2R_w$ krążków.
5. Zmierzyć suwmiarką kilkakrotnie odległości między wystającymi prętami służącymi do nałożenia krążków. Odległości należy zmierzyć dla każdych z par prętów od strony zewnętrzej jednego z prętów do strony wewnętrznej drugiego z prętów.
6. Przećwiczyć odchylanie o mały kąt, puszczanie wahadła, zliczanie pełnych drgań – robimy to przy przejściu wahadła przez położenie równowagi w jedną stronę. W miejscu pomiaru czasu i zliczania wahnięć ustawić znacznik. Zwrócić uwagę na ruch wahadła – nie powinien się kiwać ani odchylać. Po nałożeniu krążków ustawić połozenie takie aby ramiona krzyżaka były w poziomie.
7. Za pomocą stopera zmierzyć kilkakrotnie (min. 2x) czas dla 10 lub 20 pełnych wahnięć wibratora a) nieobciążonego, b) obciążonego symetrycznie krążkami w 3 różnych odległościach od osi wahadła.

Uwaga: Wielokrotność pomiarów powinna być dobrana do założonej dokładności wyznaczenia wartośc G.

4. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

A. Wyznaczenie wartości pomiarowych. Obliczenie niepewności pomiaru.

1. Obliczyć wartości średnie wielkości L, r, m, R_z i R_w, d_1, d_2 i d_3, T_0, T_1, T_2 i T_3.
2. Obliczyć wartość modułu sztywności dla wszystkich rozpatrywanych przypadków, korzystając ze wzoru (10).
3. Obliczyć wartość średnią modułu sztywności.
4. Przedstawić na wykresie zależność $T^2 = f(d^2)$ – na papierze milimetrowym z zaznaczeniem odcinków niepewności o ile będzie to możliwe. Z wykresu wyznaczyć wartość a.
5. Stosując metodę regresji liniowej – komputerowo, wyznaczyć współczynnik nachylenia prostej a we wzorze (11).
6. Korzystając ze współczynnika a regresji oblicz z (12) wartość modułu sztywności stali z której wykonano drut.

B. Niepewności pomiaru.

1. Obliczyć niepewności pomiaru wartości średnich wielkości z p. A.1.
2. Oszacuj niepewność pomiaru wartości G obliczonej w p. A.3. Skorzystaj z metody elementarnej obliczenia złożonej niepewności standardowej.
3. Oszacuj niepewność pomiaru wartości G na podstawie wykresu odręcznego.

C. Zestawienie wyników i niepewności pomiaru.

5. Przeanalizować wyniki, porównać wartości dla *G* otrzymane w p. A; zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia.

1. Porównać uzyskane wartości – z p. A.3 i z p. A.6 oraz z danymi tablicowymi. Skorzystać z kryterium zgodności.
2. Przeanalizować źródła ewentualnych rozbieżności.
3. Zapisać wnioski i uwagi dotyczące przebiegu doświadczenia i jego realizacji.

LITERATURA

1. A. Magiera (red.): I *Pracownia fizyczna*. Wyd. IV, IF UJ 2014, s. 67 – 70, http://www.1pf.if.uj.edu.pl/documents/5046939/5227638/skrypt.pdf (dostęp maj 2017)
2. *Wyznaczanie modułu sztywności drutu za pomocą wahadła torsyjnego*. http://www.fizyka.wip.pcz.pl/docs/labs/mechanika/M-6.pdf
3. *Wyznaczanie modułów sztywności*. http://www.itcmp.pwr.wroc.pl/~jwach/lab/Wyznaczanie%20sztywnosci%20-%20instrukcja.pdf
4. Zadania doświadczalne z II st. olimpiady fizycznej z wykorzystaniem wahadła torsyjnego, np.: *Wyznaczanie modułu sztywności miedzi* – 48 OF; *Wyznaczanie gęstości piasku* – 33 OF; *Wyznaczanie modułu sztywności drutu stalowego* – 40 OF. Zadania dostępne ze strony: www.of.szc.pl zakładka: Zadania.

* Złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ można obliczyć z zalecanego przez *Przewodnik GUM* wzoru:

$$Z_i = \frac{1}{2}\left[f\left(x_1,\ldots,x_i + u(x_i),\ldots,x_N\right) - f\left(x_1,\ldots,x_i - u(x_i),\ldots,x_N\right)\right].$$

Wówczas $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$.